



# METODOLOGIA DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO ISOMÉTRICO POLAR CARTESIANO NO SOFTWARE GEOGEBRA DEMONSTRANDO A RACIONALIDADE DA CONSTANTE $\pi$

## ARTIGO ORIGINAL

SAMPAIO JUNIOR, Cloves Rocha<sup>1</sup>

SAMPAIO JUNIOR, Cloves Rocha. **Metodologia do círculo trigonométrico isométrico polar cartesiano no software GeoGebra demonstrando a racionalidade da constante  $\pi$** . Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 08, Ed. 08, Vol. 05, pp. 61-109. Agosto de 2023. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/circulo-trigonometrico>, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/circulo-trigonometrico

## RESUMO

O artigo apresentará modelos matemáticos demonstrando cálculos das relações e proporções do círculo trigonométrico do círculo periódico infinito, utilizando o software GeoGebra no plano cartesiano, isométrico e polar, e considerando o primeiro quadrante do ciclo trigonométrico para os cálculos das funções das identidades trigonométricas, e os mesmos cálculos de raciocínio para os outros quadrantes. As relações e proporções infinitamente entre os perímetros das circunferências e seus diâmetros, os ângulos (arcos radianos) das circunferências, raízes quadradas. A mais antiga constante universal da matemática, envolvida em simetrias circulares, caminhos circulares de estrelas e planetas, na propagação de campos eletromagnéticos, círculos e esferas e suas relações e proporções são todas aproximadas. Seu relacionamento pode ser conhecido exatamente ou devemos limitar-nos apenas às aproximações dos cálculos do número  $\pi$ . Esse procedimento pode ser calculado com a ajuda da computação, e tentar obter seu valor racional e periódico com régua e compasso, só levará à frustração. A demonstração realizada no software GeoGebra, por meio de modelos matemáticos no plano cartesiano, isométrico e polar, demonstram aos cálculos interligados e teoremas das relações e proporções com valores racionais e periódicos das somas infinitas dos cálculos racionais periódicos do número  $\pi(\pi)$  (BECKMANN, 1971).

Palavras-chave: Número  $\pi(\pi)$ , Círculo trigonométrico, Ângulos radianos, Polígonos.



## 1. INTRODUÇÃO

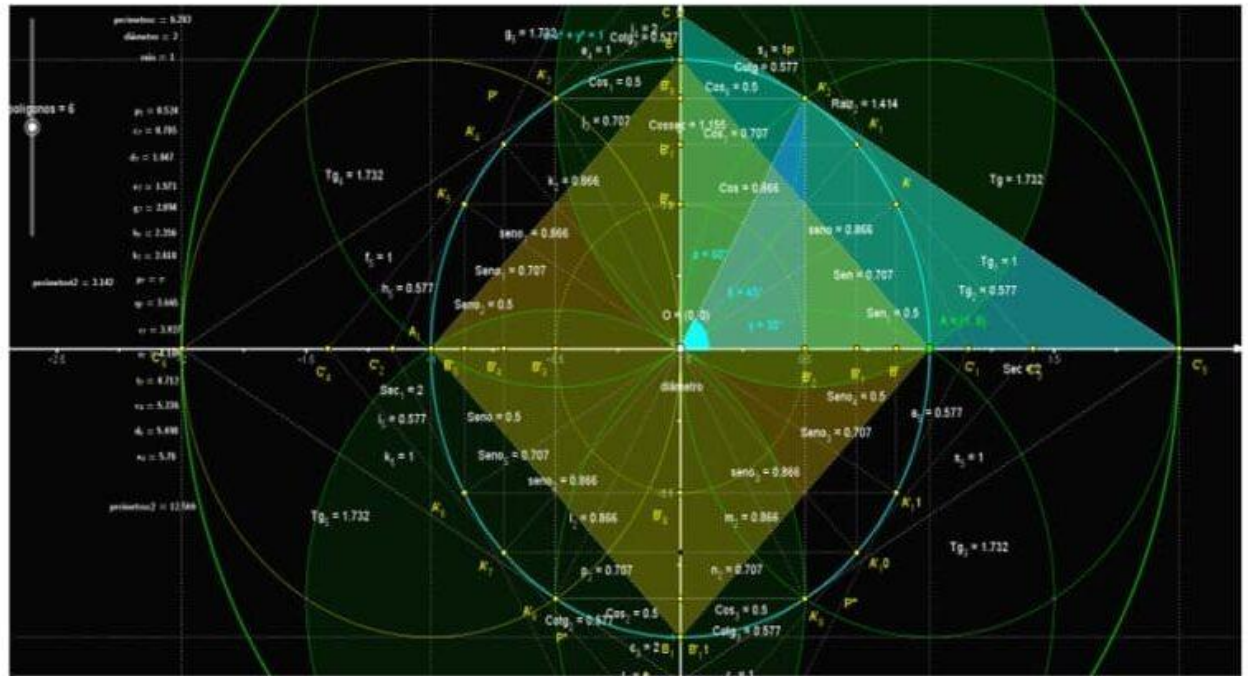
Estudo da matemática responsável pela relação e proporção existente entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo, eles têm valores fracionários conhecidos representados para as relações de seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante, secante. Do século 15 para a modernidade dos cálculos e a criação de situações teóricas relacionadas aos estudos dos ângulos das funções dos cálculos diferencial e integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, com métodos definitivos no cenário da matemática, sendo constantemente empregados em outras ciências, Medicina, Engenharia, Física, Química, Geografia, Astronomia, Biologia, Cartografia, Navegação.

## 2. DESENVOLVIMENTO

### 2.1 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA NO PLANO CARTESIANO

O sistema cartesiano ortogonal, consideremos o ponto A (0,1) do eixo A(x), de abscissa igual a 1. Construimos então, com centro na origem O (0,0) do sistema, uma circunferência que passa por A, de raio unitário. Vamos convencionar que o ponto A, será a origem dos arcos orientados dessa circunferência, isto é, que para percorrer estes arcos, o ponto A, será sempre o ponto de partida. Assim, dado um plano  $\alpha$ , um ponto O (0,0), é uma distância Raio (r), temos:  $C: x^2 + y^2 = r^2$  (reais).

Figura 1. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=1

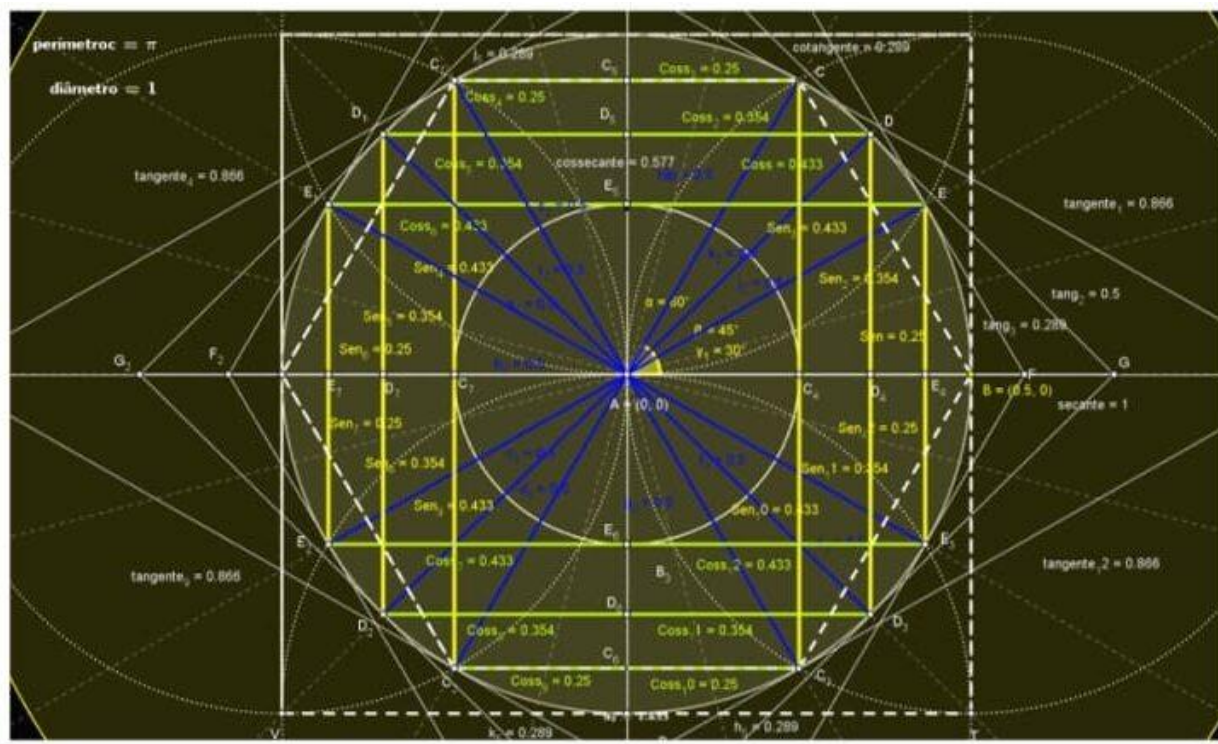


Circunferência	Diâmetro	Divisão
6.2832	2	3.1416
Lados poligonos	Lados poligonos * p	Divisão
0.5176	6.2117	1.0115
Arco radianos	Arco radianos * p	Divisão
0.5236	6.2832	1

Grau	Radianos	valores	sen	valores	cos	valores	tg	valores	cotg	valores	sec	valores	cossec	valores
0°	0	0	0	0	1	1	0	0	não	não	1	1	não	não
30°	$\pi/6$	0.5236	1/2	0.5	$\sqrt{3}/2$	0.866	$\sqrt{3}/3$	0.866	$\sqrt{3}$	1.7321	$2 * \sqrt{3}/3$	1.1547	2	2
45°	$\pi/4$	0.7854	$\sqrt{2}/2$	0.7071	$\sqrt{2}/2$	0.7071	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	1.4142	$\sqrt{2}$	1.4142
60°	$\pi/3$	1.0472	$\sqrt{3}/2$	0.866	1/2	0.5	$\sqrt{3}$	1.7321	$\sqrt{3}/3$	0.866	2	2	$2 * \sqrt{3}/3$	1.1547
90°	$\pi/2$	1.5708	1	1	0	0	não	não	0	0	não	não	1	1
120°	$2 * \pi/3$	2.0944	$\sqrt{3}/2$	0.866	-1/2	-0.5	$-\sqrt{3}$	-1.7321	$-\sqrt{3}/3$	-0.866	-2	-2	$2 * \sqrt{3}/3$	1.1547
135°	$3 * \pi/4$	2.3562	$\sqrt{2}/2$	0.7071	$-\sqrt{2}/2$	-0.7071	-1	-1	-1	-1	$-\sqrt{2}$	-1.4142	$\sqrt{2}$	1.4142
150°	$5 * \pi/6$	2.618	1/2	0.5	$-\sqrt{3}/2$	-0.866	$-\sqrt{3}/3$	-1.7321	$-\sqrt{3}$	-1.7321	$-2 * \sqrt{3}/3$	-1.1547	2	2
180°	$\pi$	$\pi$	0	0	-1	-1	0	0	não	não	-1	-1	não	não
210°	$7 * \pi/6$	3.6652	-1/2	-0.5	$-\sqrt{3}/2$	-0.866	$\sqrt{3}/3$	0.866	$\sqrt{3}$	1.7321	$-2 * \sqrt{3}/3$	-1.1547	-2	-2
225°	$5 * \pi/4$	3.927	$-\sqrt{2}/2$	-0.7071	$-\sqrt{2}/2$	-0.7071	1	1	1	- $\sqrt{2}$	-1.4142	$-\sqrt{2}$	-1.4142	-1.4142
240°	$4 * \pi/3$	4.1888	$-\sqrt{3}/2$	-0.866	-1/2	-0.5	$\sqrt{3}$	1.7321	$\sqrt{3}/3$	0.866	-2	-2	$-2 * \sqrt{3}/3$	-1.1547
270°	$3 * \pi/2$	4.7124	-1	-1	0	0	0	0	0	0	não	não	-1	-1
300°	$5 * \pi/3$	5.236	$-\sqrt{3}/2$	-0.866	1/2	0.5	$-\sqrt{3}$	-1.7321	$-\sqrt{3}$	-1.7321	2	2	$-2 * \sqrt{3}/3$	-1.1547
315°	$7 * \pi/4$	5.4978	$-\sqrt{2}/2$	-0.7071	$\sqrt{2}/2$	0.7071	-1	-1	-1	-1	$\sqrt{2}$	1.4142	$-\sqrt{2}$	-1.4142
330°	$11 * \pi/6$	5.7596	-1/2	-0.5	$\sqrt{3}/2$	0.866	$-\sqrt{3}/3$	-0.866	$-\sqrt{3}/3$	-0.866	$2 * \sqrt{3}/3$	1.1547	-2	-2
360°	$2 * \pi$	6.2832	0	0	1	1	0	0	não	não	1	1	não	não

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 2. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=0,5

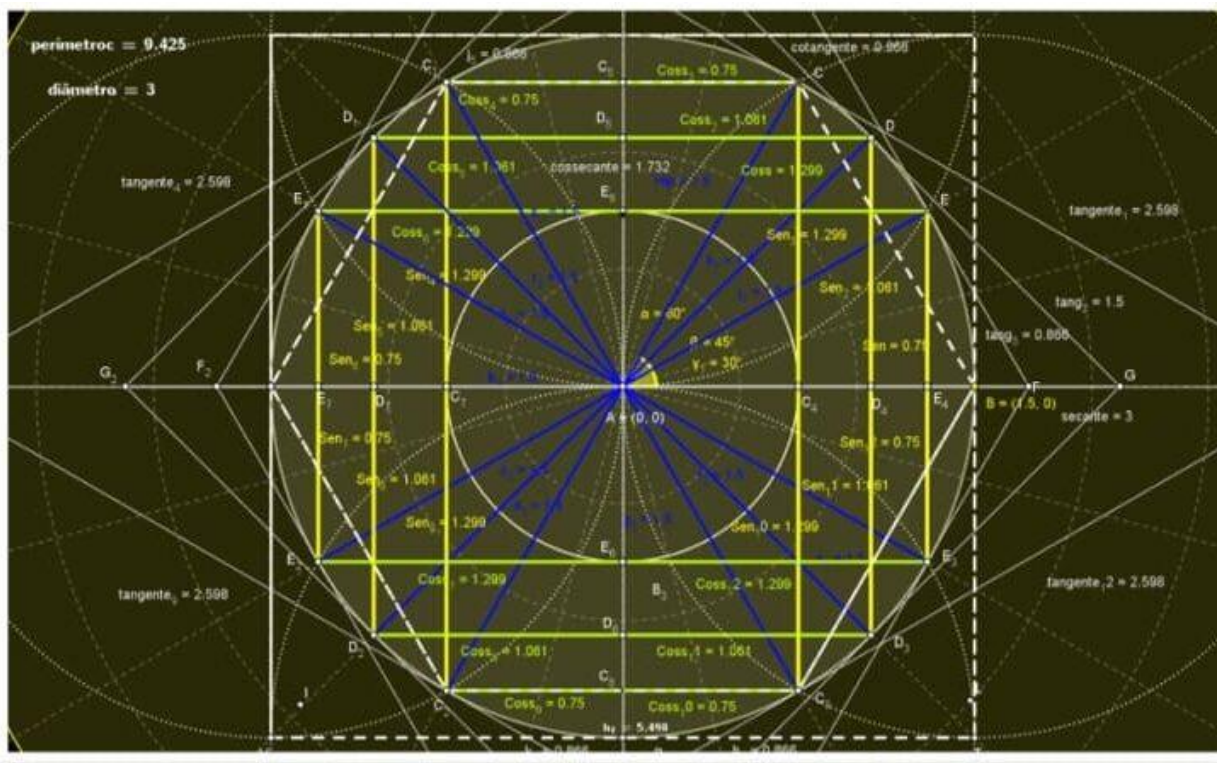


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	$\pi$	Diâmetros	1	$\pi$
Ângulos	Sen	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
$0^\circ$	0	0.5	0	-	0.5	-	0
$30^\circ$	0.25	0.4330127019	0.2886751346	0.8660254038	0.5773502692	1	0.2617993878
$45^\circ$	0.3535533906	0.3535533906	0.5	0.5	0.7071067812	0.7071067812	0.3926990817
$60^\circ$	0.4330127019	0.25	0.8660254038	0.2886751346	1	0.5773502692	0.5235987756
$90^\circ$	0.5	0	-	0	-	0.5	0.7853981634
$120^\circ$	0.4330127019	-0.25	-0.8660254038	-0.2886751346	-1	0.5773502692	1.0471975512
$135^\circ$	0.3535533906	-0.3535533906	-0.5	-0.5	-0.7071067812	0.7071067812	1.1780972451
$150^\circ$	0.25	-0.4330127019	-0.2886751346	-0.8660254038	-0.5773502692	1	1.308996939
$180^\circ$	0	-0.5	0	-	-0.5	-	1.5707963268
$210^\circ$	-0.25	-0.4330127019	0.8660254038	0.8660254038	-0.5773502692	-1	1.8325957146
$225^\circ$	-0.3535533906	-0.3535533906	0.5	0.5	-0.7071067812	-0.7071067812	1.9634954085
$240^\circ$	-0.4330127019	-0.25	0.2886751346	0.2886751346	-1	-0.5773502692	2.0943951024
$270^\circ$	-0.5	0	-	0	-	-0.5	2.3561944902
$300^\circ$	-0.4330127019	0.25	-0.8660254038	-0.2886751346	1	-0.5773502692	2.617993878
$315^\circ$	-0.3535533906	0.3535533906	-0.5	-0.5	0.7071067812	-0.7071067812	2.7488935719
$330^\circ$	-0.25	0.4330127019	-0.2886751346	-0.8660254038	0.5773502692	-1	2.8797932658
$360^\circ$	0	0.5	0	-	0.5	-	$\pi$

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 3. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=1.5

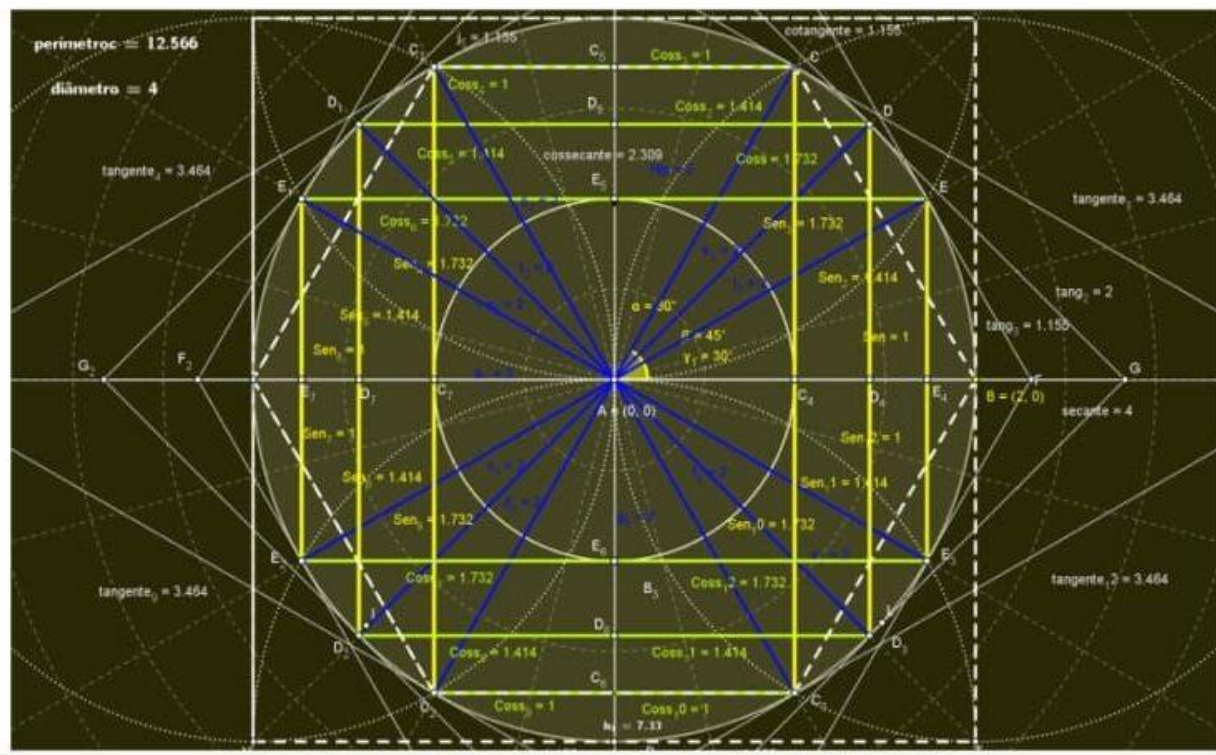


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	9.4247779608	Diâmetros	3	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	1.5	0	-	1.5	-	0
30°	0.75	1.2990381057	0.8660254038	2.5980762114	1.7320508076	3	0.7853981634
45°	1.0606601718	1.0606601718	1.5	1.5	2.1213203436	2.1213203436	1.1780972451
60°	1.2990381057	0.75	2.5980762114	0.8660254038	3	1.7320508076	1.5707963268
90°	1.5	0	-	0	-	1.5	2.3561944902
120°	1.2990381057	-0.75	-2.5980762114	-0.8660254038	-3	1.7320508076	3.1415926536
135°	1.0606601718	-1.0606601718	-1.5	-1.5	-2.1213203436	2.1213203436	3.5342917353
150°	0.75	-1.2990381057	-0.8660254038	-2.5980762114	-1.7320508076	3	3.926990817
180°	0	-1.5	0	-	-1.5	-	4.7123889804
210°	-0.75	-1.2990381057	2.5980762114	2.5980762114	-1.7320508076	-3	5.4977871438
225°	-1.0606601718	-1.0606601718	1.5	1.5	-2.1213203436	-2.1213203436	5.8904862255
240°	-1.2990381057	-0.75	0.8660254038	0.8660254038	-3	-1.7320508076	6.2831853072
270°	-1.5	0	-	0	-	-1.5	7.0685834706
300°	-1.2990381057	0.75	-2.5980762114	-0.8660254038	3	-1.7320508076	7.853981634
315°	-1.0606601718	1.0606601718	-1.5	-1.5	2.1213203436	-2.1213203436	8.2466807157
330°	-0.75	1.2990381057	-0.8660254038	-2.5980762114	1.7320508076	-3	8.6393797974
360°	0	1.5	0	-	1.5	-	9.4247779608

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 4. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=2

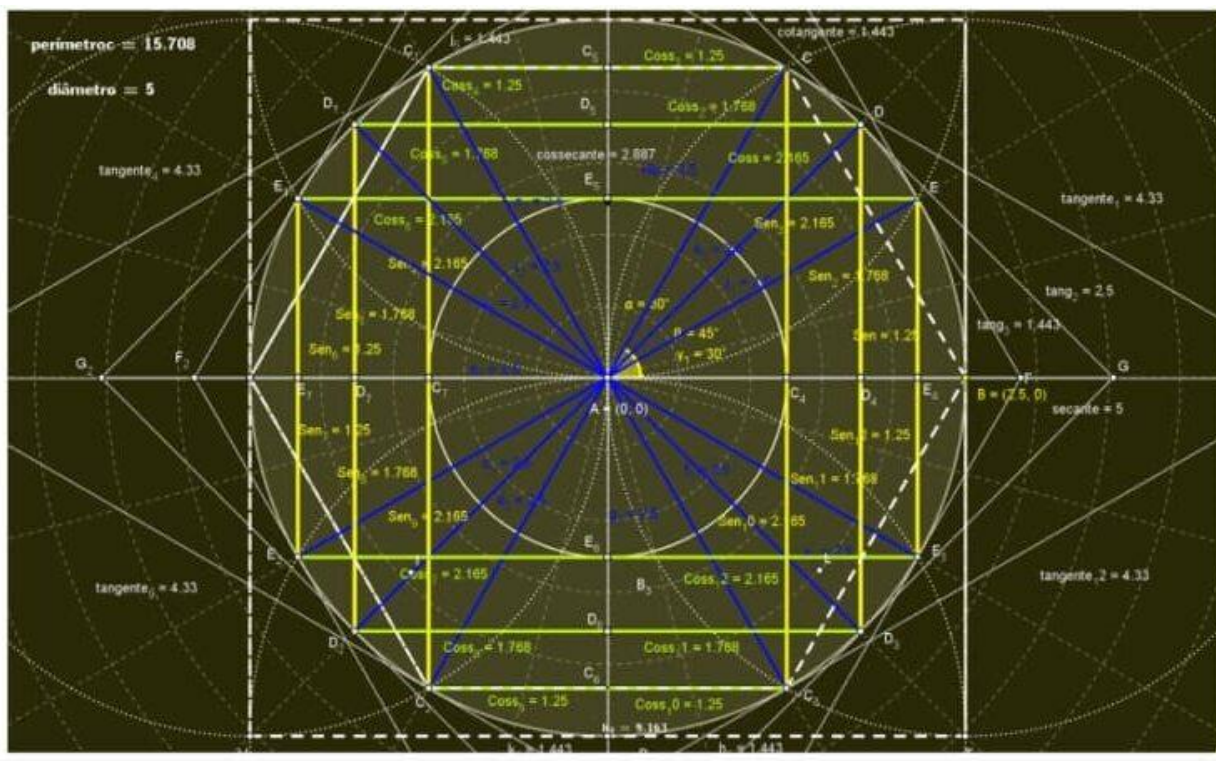


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	12.5663706144	Diâmetros	4	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	2	0	-	2	-	0
30°	1	1.7320508076	1.1547005384	3.4641016151	2.3094010768	4	1.0471975512
45°	1.4142135624	1.4142135624	2	2	2.8284271247	2.8284271247	1.5707963268
60°	1.7320508076	1	3.4641016151	1.1547005384	4	2.3094010768	2.0943951024
90°	2	0	-	0	-	2	$\pi$
120°	1.7320508076	-1	-3.4641016151	-1.1547005384	-4	2.3094010768	4.1887902048
135°	1.4142135624	-1.4142135624	-2	-2	-2.8284271247	2.8284271247	4.7123889804
150°	1	-1.7320508076	-1.1547005384	-3.4641016151	-2.3094010768	4	5.235987756
180°	0	-2	0	-	-2	-	6.2831853072
210°	-1	-1.7320508076	3.4641016151	3.4641016151	-2.3094010768	-4	7.3303828584
225°	-1.4142135624	-1.4142135624	2	2	-2.8284271247	-2.8284271247	7.853981634
240°	-1.7320508076	-1	1.1547005384	1.1547005384	-4	-2.3094010768	8.3775804096
270°	-2	0	-	0	-	-2	9.4247779608
300°	-1.7320508076	1	-3.4641016151	-1.1547005384	4	-2.3094010768	10.471975512
315°	-1.4142135624	1.4142135624	-2	-2	2.8284271247	-2.8284271247	10.9955742876
330°	-1	1.7320508076	-1.1547005384	-3.4641016151	2.3094010768	-4	11.5191730632
360°	0	2	0	-	2	-	12.5663706144

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 5. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=2.5

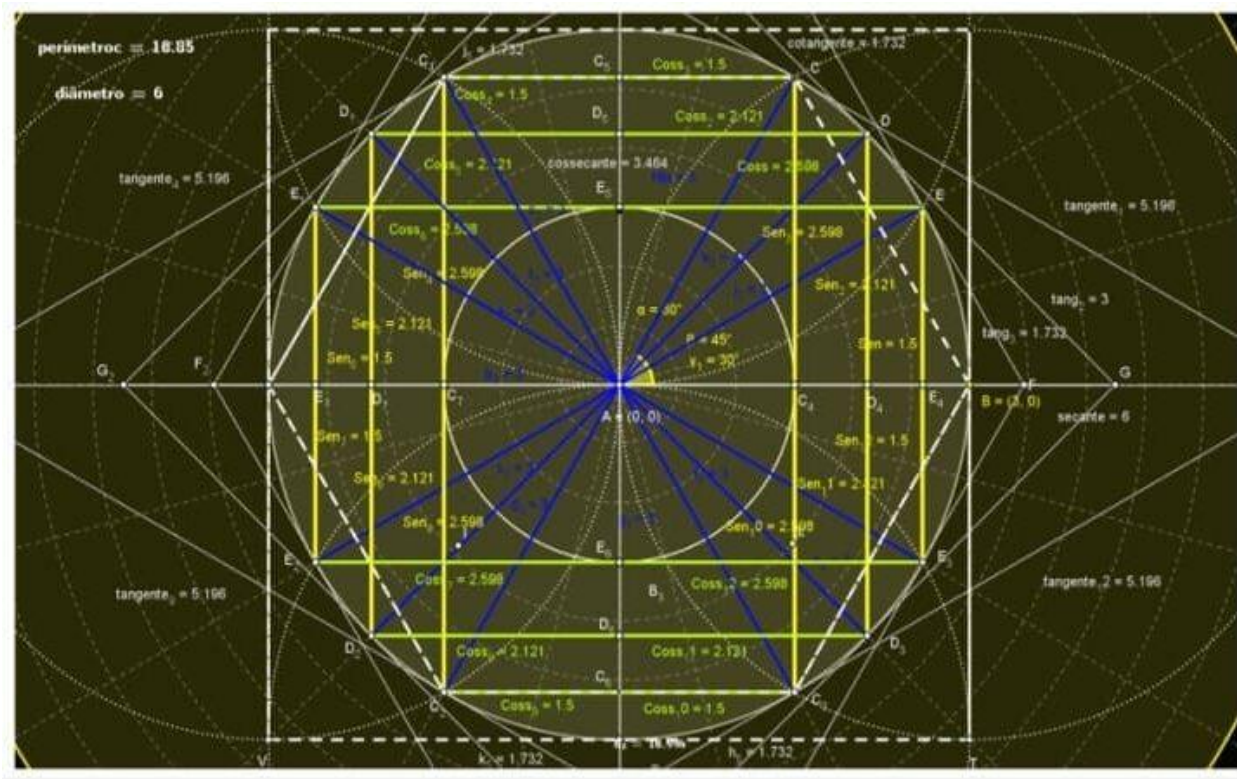


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	15.7079632679	Diâmetros	5	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	2.5	0	∞	2.5	∞	0
30°	1.25	2.1650635095	1.443375673	4.3301270189	2.8867513459	5	1.308996939
45°	1.767766953	1.767766953	2.5	2.5	3.5355339059	3.5355339059	1.9634954085
60°	2.1650635095	1.25	4.3301270189	1.443375673	5	2.8867513459	2.617993878
90°	2.5	0	∞	0	∞	2.5	3.926990817
120°	2.1650635095	-1.25	-4.3301270189	-1.443375673	-5	2.8867513459	5.235987756
135°	1.767766953	-1.767766953	-2.5	-2.5	-3.5355339059	3.5355339059	5.8904862255
150°	1.25	-2.1650635095	-1.443375673	-4.3301270189	-2.8867513459	5	6.544984695
180°	0	-2.5	0	∞	-2.5	∞	7.853981634
210°	-1.25	-2.1650635095	4.3301270189	4.3301270189	-2.8867513459	-5	9.162978573
225°	-1.767766953	-1.767766953	2.5	2.5	-3.5355339059	-3.5355339059	9.8174770425
240°	-2.1650635095	-1.25	1.443375673	1.443375673	-5	-2.8867513459	10.471975512
270°	-2.5	0	∞	0	∞	-2.5	11.780972451
300°	-2.1650635095	1.25	-4.3301270189	-1.443375673	5	-2.8867513459	13.08996939
315°	-1.767766953	1.767766953	-2.5	-2.5	3.5355339059	-3.5355339059	13.7444678595
330°	-1.25	2.1650635095	-1.443375673	-4.3301270189	2.8867513459	-5	14.398966329
360°	0	2.5	0	∞	2.5	∞	15.7079632679

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 6. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=3



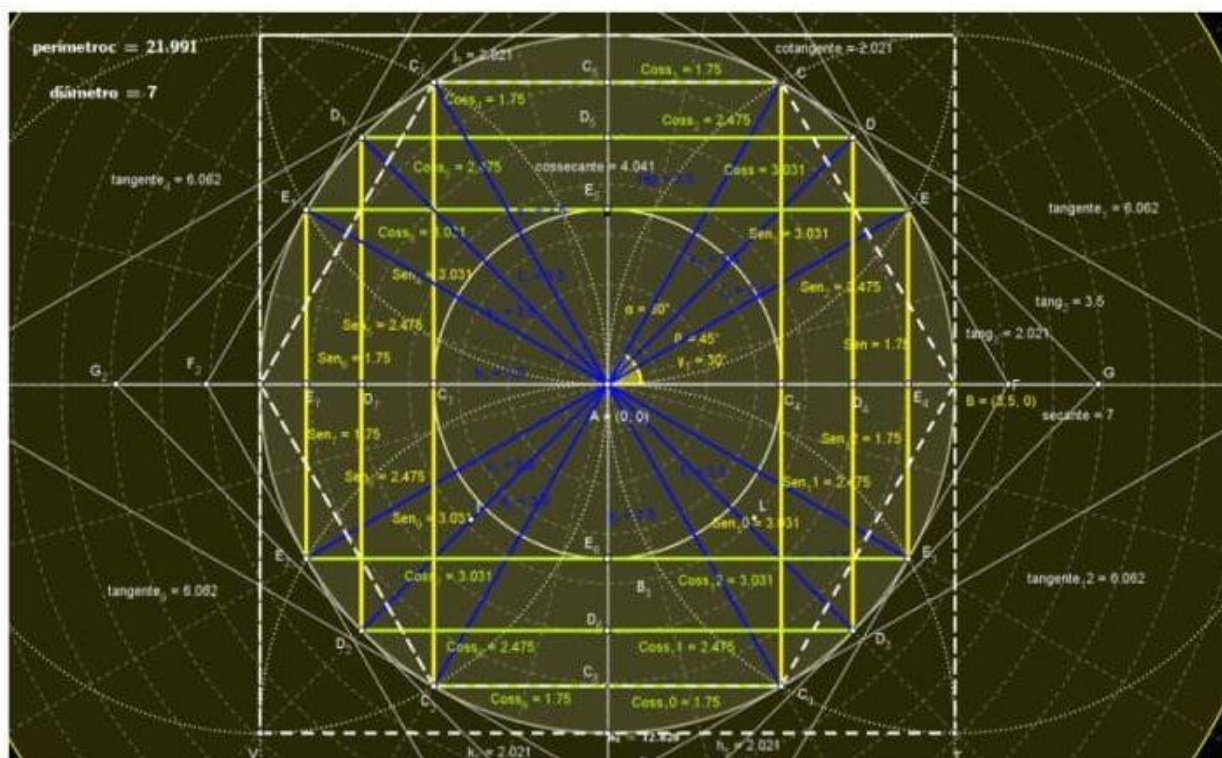
**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	18.8495559215	Diâmetros	6	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	3	0	-	3	-	0
30°	1.5	2.5980762114	1.7320508076	5.1961524227	3.4641016151	6	1.5707963268
45°	2.1213203436	2.1213203436	3	3	4.2426406871	4.2426406871	2.3561944902
60°	2.5980762114	1.5	5.1961524227	1.7320508076	6	3.4641016151	$\pi$
90°	3	0	-	0	-	3	4.7123889804
120°	2.5980762114	-1.5	-5.1961524227	-1.7320508076	-6	3.4641016151	6.2831853072
135°	2.1213203436	-2.1213203436	-3	-3	-4.2426406871	4.2426406871	7.0685834706
150°	1.5	-2.5980762114	-1.7320508076	-5.1961524227	-3.4641016151	6	7.853981634
180°	0	-3	0	-	-3	-	9.4247779608
210°	-1.5	-2.5980762114	5.1961524227	5.1961524227	-3.4641016151	-6	10.9955742876
225°	-2.1213203436	-2.1213203436	3	3	-4.2426406871	-4.2426406871	11.780972451
240°	-2.5980762114	-1.5	1.7320508076	1.7320508076	-6	-3.4641016151	12.5663706144
270°	-3	0	-	0	-	-3	14.1371669412
300°	-2.5980762114	1.5	-5.1961524227	-1.7320508076	6	-3.4641016151	15.7079632679
315°	-2.1213203436	2.1213203436	-3	-3	4.2426406871	-4.2426406871	16.4933614313
330°	-1.5	2.5980762114	-1.7320508076	-5.1961524227	3.4641016151	-6	17.2787595947
360°	0	3	0	-	3	-	18.8495559215

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).



Figura 7. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=3.5

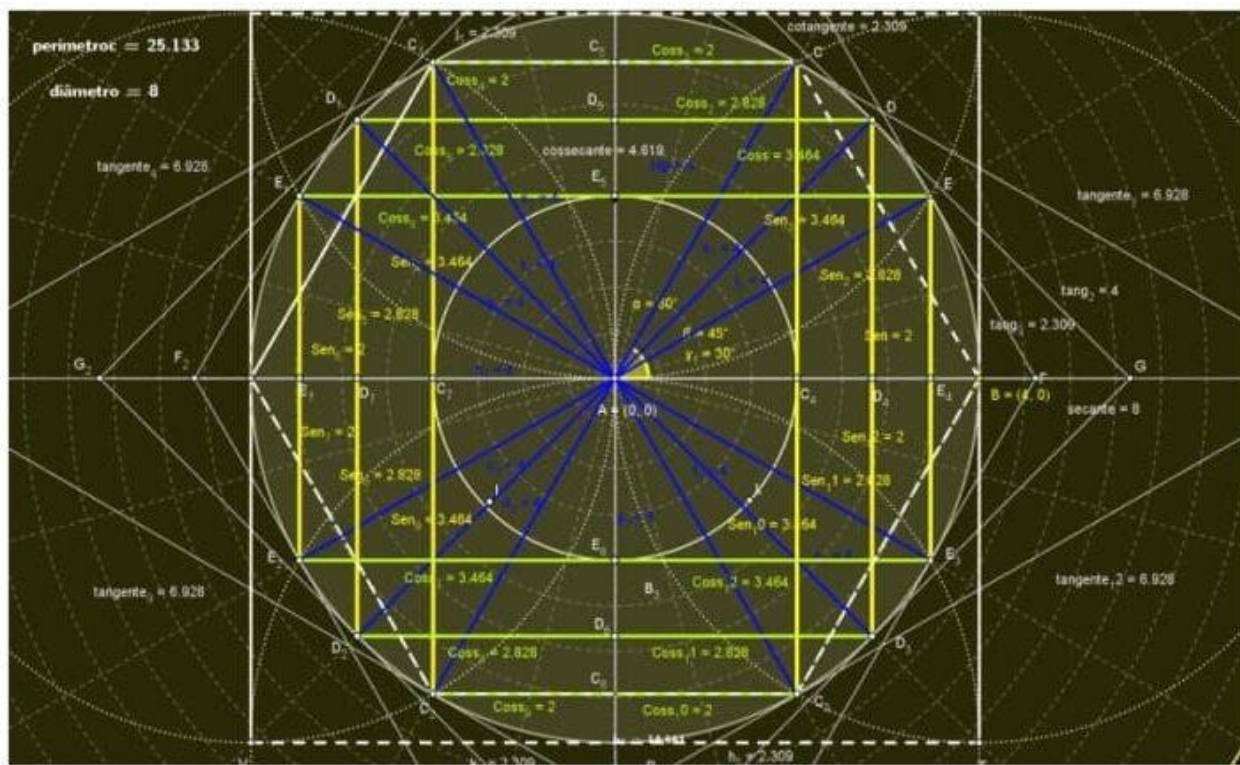


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	21.9911485751	Diâmetros	7	$\pi$
Ângulos	Senos	Cossenos	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	3.5	0	-	3.5	-	0
30°	1.75	3.0310889132	2.0207259422	6.0621778265	4.0414518843	7	1.8325957146
45°	2.4748737342	2.4748737342	3.5	3.5	4.9497474683	4.9497474683	2.7488935719
60°	3.0310889132	1.75	6.0621778265	2.0207259422	7	4.0414518843	3.6651914292
90°	3.5	0	-	0	-	3.5	5.4977871438
120°	3.0310889132	-1.75	-6.0621778265	-2.0207259422	-7	4.0414518843	7.3303828584
135°	2.4748737342	-2.4748737342	-3.5	-3.5	-4.9497474683	4.9497474683	8.2466807157
150°	1.75	-3.0310889132	-2.0207259422	-6.0621778265	-4.0414518843	7	9.162978573
180°	0	-3.5	0	-	-3.5	-	10.9955742876
210°	-1.75	-3.0310889132	6.0621778265	6.0621778265	-4.0414518843	-7	12.8281700022
225°	-2.4748737342	-2.4748737342	3.5	3.5	-4.9497474683	-4.9497474683	13.7444678595
240°	-3.0310889132	-1.75	2.0207259422	2.0207259422	-7	-4.0414518843	14.6607657168
270°	-3.5	0	-	0	-	-3.5	16.4933614313
300°	-3.0310889132	1.75	-6.0621778265	-2.0207259422	7	-4.0414518843	18.3259571459
315°	-2.4748737342	2.4748737342	-3.5	-3.5	4.9497474683	-4.9497474683	19.2422550032
330°	-1.75	3.0310889132	-2.0207259422	-6.0621778265	4.0414518843	-7	20.1585528605
360°	0	3.5	0	-	3.5	-	21.9911485751

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 8. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=4

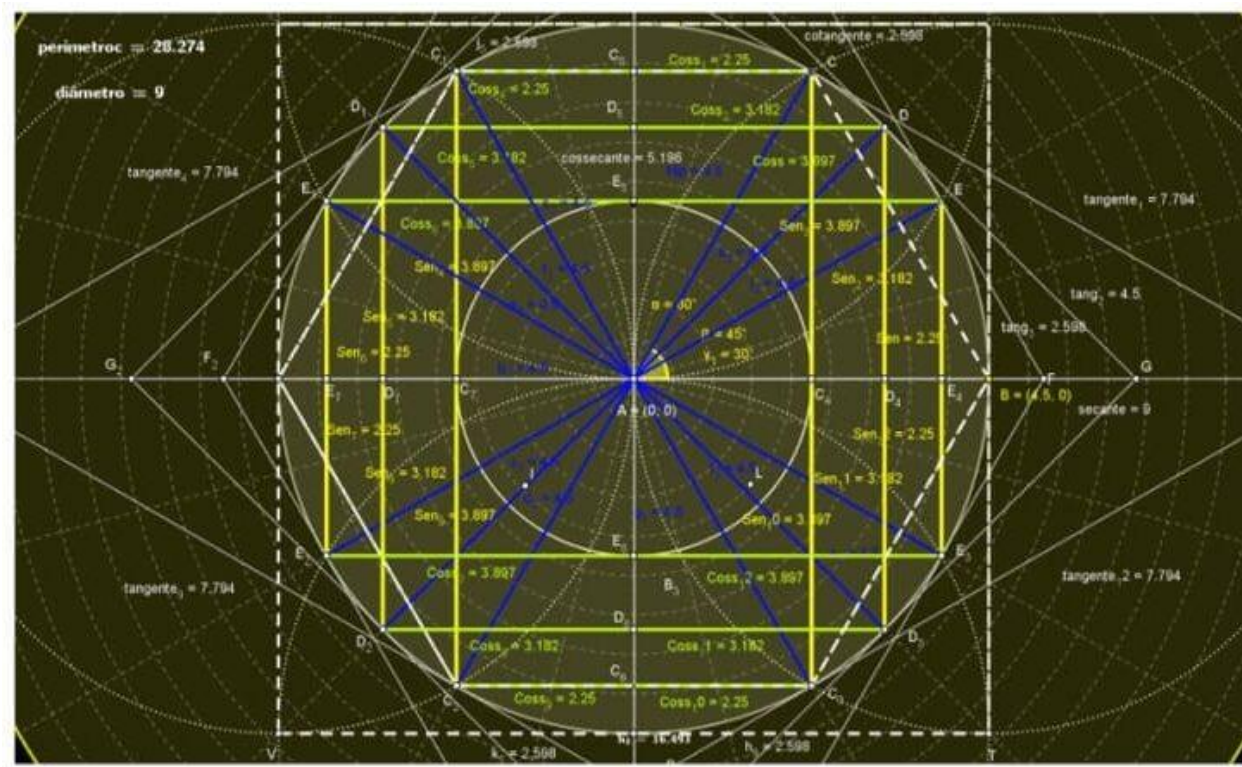


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	25.1327412287	Diâmetros	8	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	4	0	-	4	-	0
30°	2	3.4641016151	2.3094010768	6.9282032303	4.6188021535	8	2.0943951024
45°	2.8284271247	2.8284271247	4	4	5.6568542495	5.6568542495	$\pi$
60°	3.4641016151	2	6.9282032303	2.3094010768	8	4.6188021535	4.1887902048
90°	4	0	-	0	-	4	6.2831853072
120°	3.4641016151	-2	-6.9282032303	-2.3094010768	-8	4.6188021535	8.3775804096
135°	2.8284271247	-2.8284271247	-4	-4	-5.6568542495	5.6568542495	9.4247779608
150°	2	-3.4641016151	-2.3094010768	-6.9282032303	-4.6188021535	8	10.471975512
180°	0	-4	0	-	-4	-	12.5663706144
210°	-2	-3.4641016151	6.9282032303	6.9282032303	-4.6188021535	-8	14.6607657168
225°	-2.8284271247	-2.8284271247	4	4	-5.6568542495	-5.6568542495	15.7079632679
240°	-3.4641016151	-2	2.3094010768	2.3094010768	-8	-4.6188021535	16.7551608191
270°	-4	0	-	0	-	-4	18.8495559215
300°	-3.4641016151	2	-6.9282032303	-2.3094010768	8	-4.6188021535	20.9439510239
315°	-2.8284271247	2.8284271247	-4	-4	5.6568542495	-5.6568542495	21.9911485751
330°	-2	3.4641016151	-2.3094010768	-6.9282032303	4.6188021535	-8	23.0383461263
360°	0	4	0	-	4	-	25.1327412287

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 9. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=4.5

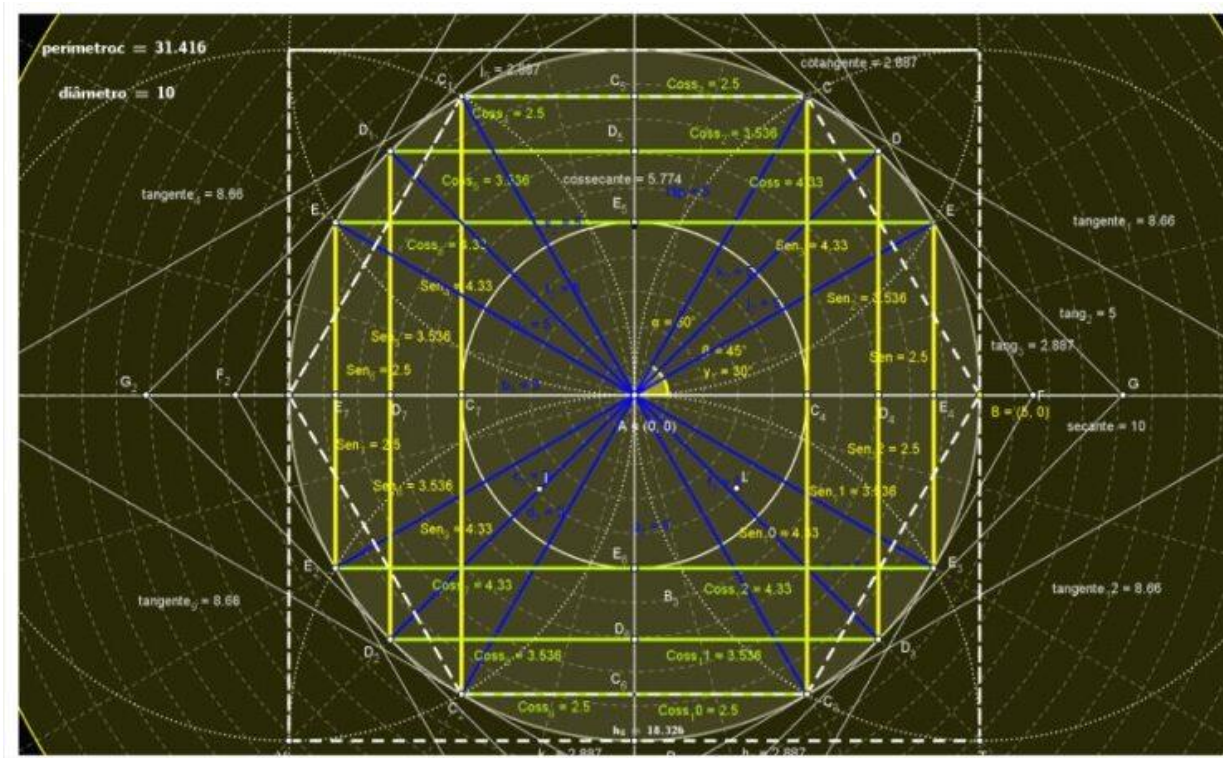


**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	28.2743338823	Diâmetros	9	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	4.5	0	-	4.5	-	0
30°	2.25	3.897114317	2.5980762114	7.7942286341	5.1961524227	9	2.3561944902
45°	3.1819805153	3.1819805153	4.5	4.5	6.3639610307	6.3639610307	3.5342917353
60°	3.897114317	2.25	7.7942286341	2.5980762114	9	5.1961524227	4.7123889804
90°	4.5	0	-	0	-	4.5	7.0685834706
120°	3.897114317	-2.25	-7.7942286341	-2.5980762114	-9	5.1961524227	9.4247779608
135°	3.1819805153	-3.1819805153	-4.5	-4.5	-6.3639610307	6.3639610307	10.6028752059
150°	2.25	-3.897114317	-2.5980762114	-7.7942286341	-5.1961524227	9	11.780972451
180°	0	-4.5	0	-	-4.5	-	14.1371669412
210°	-2.25	-3.897114317	7.7942286341	7.7942286341	-5.1961524227	-9	16.4933614313
225°	-3.1819805153	-3.1819805153	4.5	4.5	-6.3639610307	-6.3639610307	17.6714586764
240°	-3.897114317	-2.25	2.5980762114	2.5980762114	-9	-5.1961524227	18.8495559215
270°	-4.5	0	-	0	-	-4.5	21.2057504117
300°	-3.897114317	2.25	-7.7942286341	-2.5980762114	9	-5.1961524227	23.5619449019
315°	-3.1819805153	3.1819805153	-4.5	-4.5	6.3639610307	-6.3639610307	24.740042147
330°	-2.25	3.897114317	-2.5980762114	-7.7942286341	5.1961524227	-9	25.9181393921
360°	0	4.5	0	-	4.5	-	28.2743338823

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 10. Demonstração do círculo trigonométrico no plano cartesiano raio=5



**TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA**

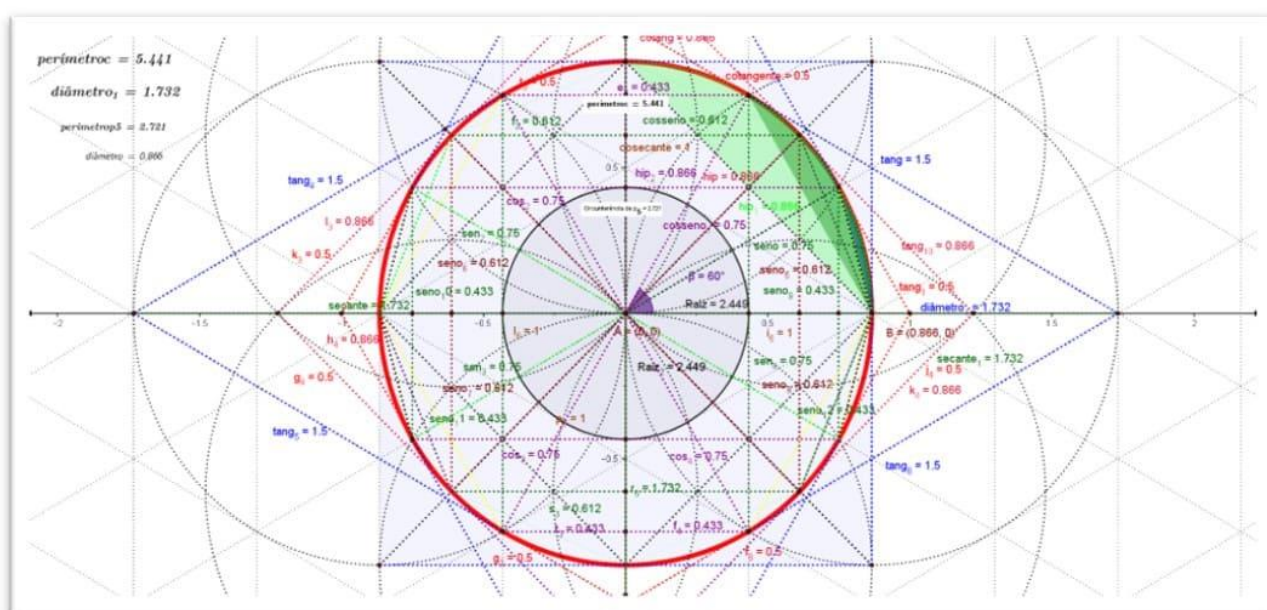
TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	31.4159265359	Diâmetros	10	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	5	0	-	5	-	0
30°	2.5	4.3301270189	2.8867513459	8.6602540378	5.7735026919	10	2.617993878
45°	3.5355339059	3.5355339059	5	5	7.0710678119	7.0710678119	3.926990817
60°	4.3301270189	2.5	8.6602540378	2.8867513459	10	5.7735026919	5.235987756
90°	5	0	-	0	-	5	7.853981634
120°	4.3301270189	-2.5	-8.6602540378	-2.8867513459	-10	5.7735026919	10.471975512
135°	3.5355339059	-3.5355339059	-5	-5	-7.0710678119	7.0710678119	11.780972451
150°	2.5	-4.3301270189	-2.8867513459	-8.6602540378	-5.7735026919	10	13.08996939
180°	0	-5	0	-	-5	-	15.7079632679
210°	-2.5	-4.3301270189	8.6602540378	8.6602540378	-5.7735026919	-10	18.3259571459
225°	-3.5355339059	-3.5355339059	5	5	-7.0710678119	-7.0710678119	19.6349540849
240°	-4.3301270189	-2.5	2.8867513459	2.8867513459	-10	-5.7735026919	20.9439510239
270°	-5	0	-	0	-	-5	23.5619449019
300°	-4.3301270189	2.5	-8.6602540378	-2.8867513459	10	-5.7735026919	26.1799387799
315°	-3.5355339059	3.5355339059	-5	-5	7.0710678119	-7.0710678119	27.4889357189
330°	-2.5	4.3301270189	-2.8867513459	-8.6602540378	5.7735026919	-10	28.7979326579
360°	0	5	0	-	5	-	31.4159265359

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.2 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA NO PLANO ISOMÉTRICO

A circunferência é um conjunto de pontos em um plano cuja distância a um determinado ponto desse plano é igual a uma distância. O ponto dado é o centro, e a distância dada é o raio (r) da circunferência. Assim, dado um plano  $\alpha$ , um ponto O (0,0), é uma distância Raio (r) temos:  $C: x^2 + y^2 = IR$  (reais)

Figura 11. Círculo trigonométrico no plano isométrico diâmetro=  $(\sqrt{3}=1.732\ 050\dots)$



Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).



Tabela 1. Demonstração no plano isométrico racional periódico infinito fig. 11

Circunferências	Diâmetros	Divisões racionais
5.441 398 092 702 66...	1.732 050 807 568...	$\pi=3.141 592 653 589 389...$
Raio	0.866 025 403 784.	$IM(f)= \{y \in \mathbb{R} \uparrow \{-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}\}$

TRIGONOMETRIA DINÂMICA RACIONAL PERIÓDICA INFINITA							
TRIGONOMETRIA	RACIONAL	PERIÓDICA	Circunferências	5.4413980927	Diâmetros	1.7320508076	$\pi$
Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante	Radianos
0°	0	0.8660254038	0	∞	0.8660254038	∞	0
30°	0.4330127019	0.75	0.5	1.5	1	1.7320508076	0.4534498411
45°	0.6123724357	0.6123724357	0.8660254038	0.8660254038	1.2247448714	1.2247448714	0.6801747616
60°	0.75	0.4330127019	1.5	0.5	1.7320508076	1	0.9068996821
90°	0.8660254038	0	∞	0	∞	0.8660254038	1.3603495232
120°	0.75	-0.4330127019	-1.5	-0.5	-1.7320508076	1	1.8137993642
135°	0.6123724357	-0.6123724357	-0.8660254038	-0.8660254038	-1.2247448714	1.2247448714	2.0405242848
150°	0.4330127019	-0.75	-0.5	-1.5	-1	1.7320508076	2.2672492053
180°	0	-0.8660254038	0	∞	-0.8660254038	∞	2.7206990464
210°	-0.4330127019	-0.75	1.5	1.5	-1	-1.7320508076	3.1741488874
225°	-0.6123724357	-0.6123724357	0.8660254038	0.8660254038	-1.2247448714	-1.2247448714	3.4008738079
240°	-0.75	-0.4330127019	0.5	0.5	-1.7320508076	-1	3.6275987285
270°	-0.8660254038	0	∞	0	∞	-0.8660254038	4.0810485695
300°	-0.75	0.4330127019	-1.5	-0.5	1.7320508076	-1	4.5344984106
315°	-0.6123724357	0.6123724357	-0.8660254038	-0.8660254038	1.2247448714	-1.2247448714	4.7612233311
330°	-0.4330127019	0.75	-0.5	-1.5	1	-1.7320508076	4.9879482516
360°	0	0.8660254038	0	∞	0.8660254038	∞	5.4413980927

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

### 2.3 VALORES NOTÁVEIS

A partir de convenientes triângulos retangulares, as definições de seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e (secante), permitem a seguinte tabela de infinitos valores racionais periódicos notáveis (IEZZI, 1993).



$\text{Seno } B = \frac{b}{a} = \text{cosseno } C = \frac{b}{a}$	$\text{cosseno } B = \frac{c}{a} = \text{Seno } C = \frac{c}{a}$
$\text{Tangente } B = \frac{b}{c} = \text{cotangente } C = \frac{b}{c}$	$\text{cotangente } B = \frac{c}{b} = \text{Tangente } C = \frac{c}{b}$
$\text{Secante } B = \frac{a}{c} = \text{cossecante } C = \frac{a}{c}$	$\text{cossecante } B = \frac{a}{b} = \text{Secante } C = \frac{a}{b}$

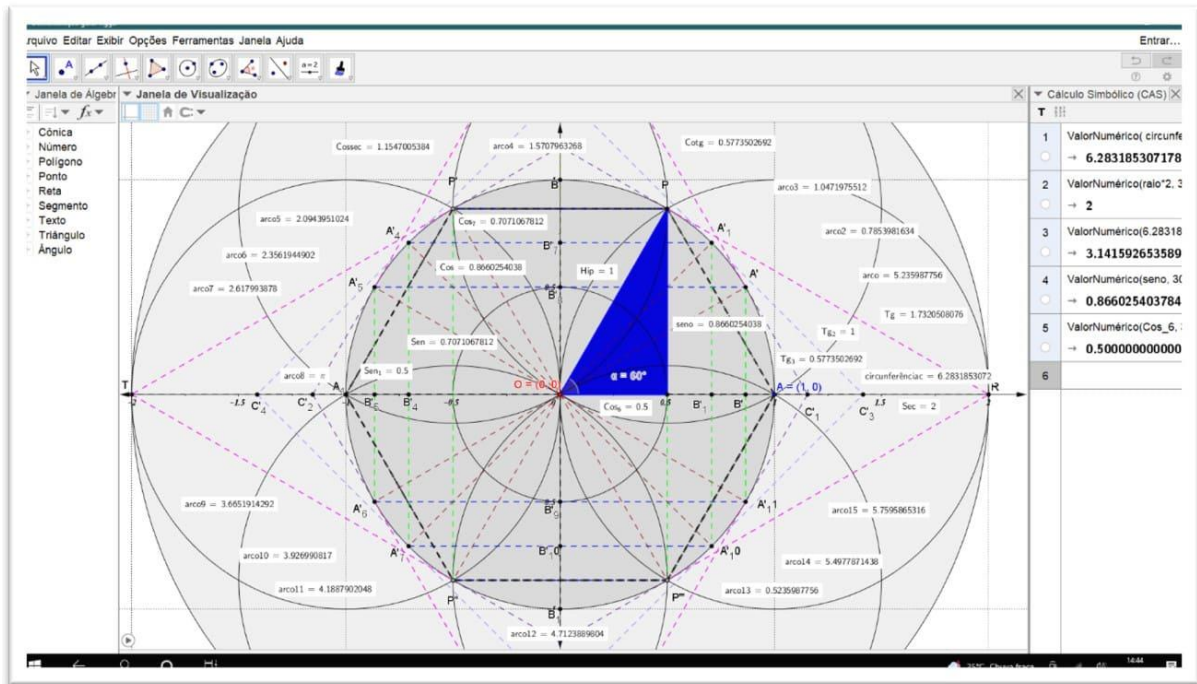
(x)	sen.(x)	valores	cos.(x)	valores	Tang(x)	valores
30°	$\frac{1}{2}$	=0.500 000 000	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	=0.866 025 40	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	=0.577 350
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	=0.707 106 781	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	=0.707 106 78	1	=1.000 000
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	=0.866 025 403	$\frac{1}{2}$	=0.500 000 00	$\sqrt{3}$	=1.732 050
(x)	cot. (x)	valores	cossec(x)	valores	Sec.(x)	valores
30°	$\sqrt{3}$	=1.732 050 808	= 2.	=2.000 000 00	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	=1.154 700
45°	1	=1.000 000 000	$\sqrt{2}$	=1.414 213 56	$\sqrt{2}$	=1.414 213
60°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	=0.577 350 269	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	=1.154 700 53	= 2.	=2.000 000

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas no círculo trigonométrico estão associadas aos quatro eixos, nos quais serão definidas as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante no plano cartesiano.

Figura 12. Os quatro eixos das funções trigonométricas completas. C:  $x^2 + y^2 = 1$



constante	C: $x^2 + y^2 = 1$	{3.14159265358938917154368732170691}
Perímetros	{per. c:0,33} =	{6.28318530717877834308737464341382}
Diâmetros	{diâmetro c:0,33} =	{2.00000000000000000000000000000000}
Divisões (racionais)	{divisão. c:0,33} =	{3.14159265358938917154368732170691}
Seno a (60°)	{Seno.} = $\sqrt{3}/2$	{0.86602540378489124679707960950490}
Cosseno (60°)	{cosseno.} = $1/2$	{0.50000000000000000000000000000000}
Tangente (60°)	{tangente} = $\sqrt{3}$	{1.73205080756978249359415921900981}
Cotangente (60°)	{cotg.} = $\sqrt{3}/3$	{0.57735026919075184872247864978667}
Cossecante (60°)	{cossec.} = $2\sqrt{3}/3$	{1.15470053837864806230715595805022}
Secante (60°)	{secante} = $\sqrt{4}$	{2.00000000000000000000000000000000}
Radianos (60°)	{Arcos} = $\pi/3$	{1.04719755119713465949418080473976}
Radianos (120°)	{Arc.} = $2\pi/3$	{2.09439510239426931898836160947952}
Radianos (240°)	{Arc.} = $4\pi/3$	{4.18879020478585222872491642894254}
Radianos (300°)	{Arc.} = $5\pi/3$	{5.23598775598231528590614553617818}

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

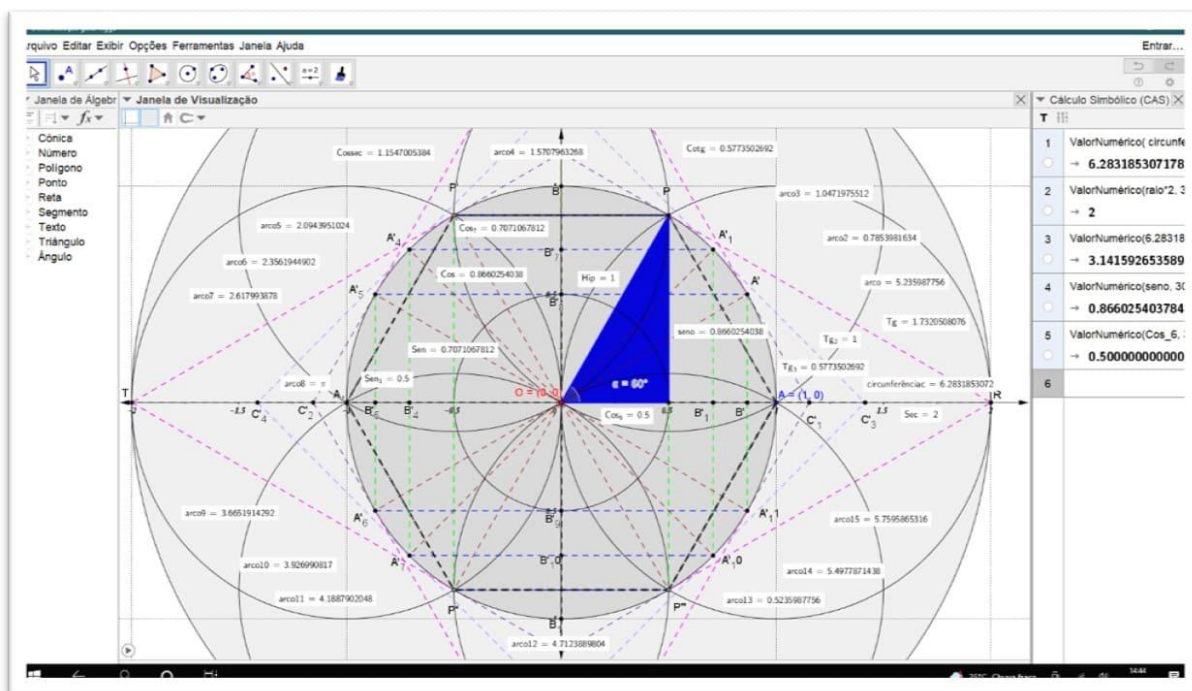


### 2.4.1 SENO

Definição do seno  $\alpha$ , como sendo razão e proporção entre o cateto oposto a  $\alpha$ , e a hipotenusa do triângulo retângulo. Pode-se, portanto, definir uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , tal que a cada  $x$  associa em  $y = \text{seno } \alpha$ .

Da definição da função  $y=f(x)= \text{seno } x$ , decorre que o Domínio:  $D(F)=\mathbb{R}$ ; imagem:  $IM(f)= \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Figura 13. As funções trigonométricas completas seno  $\alpha$   $60^\circ$   $C: x^2 + y^2 = 1$



<b>Seno (<math>\alpha=60^\circ</math>)</b>	<b>Cateto oposto</b> <b>hipotenusa</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \{0.866025403784891246797079\}$
--	---	---

Hipotenusa	Seno a ( $60^\circ$ )	Cosseno ( $60^\circ$ )
$A^2 =$	$B^2 +$	$C^2$
$\{1.0000000000000000\}^2$	$\{0.86602540378489124\}^2$	$\{0.5000000000000000\}^2$
$\{1.0000000000000000\}$	$\{0.7500000000000000\}$	$\{0.2500000000000000\}$

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.4.2 COSSENO

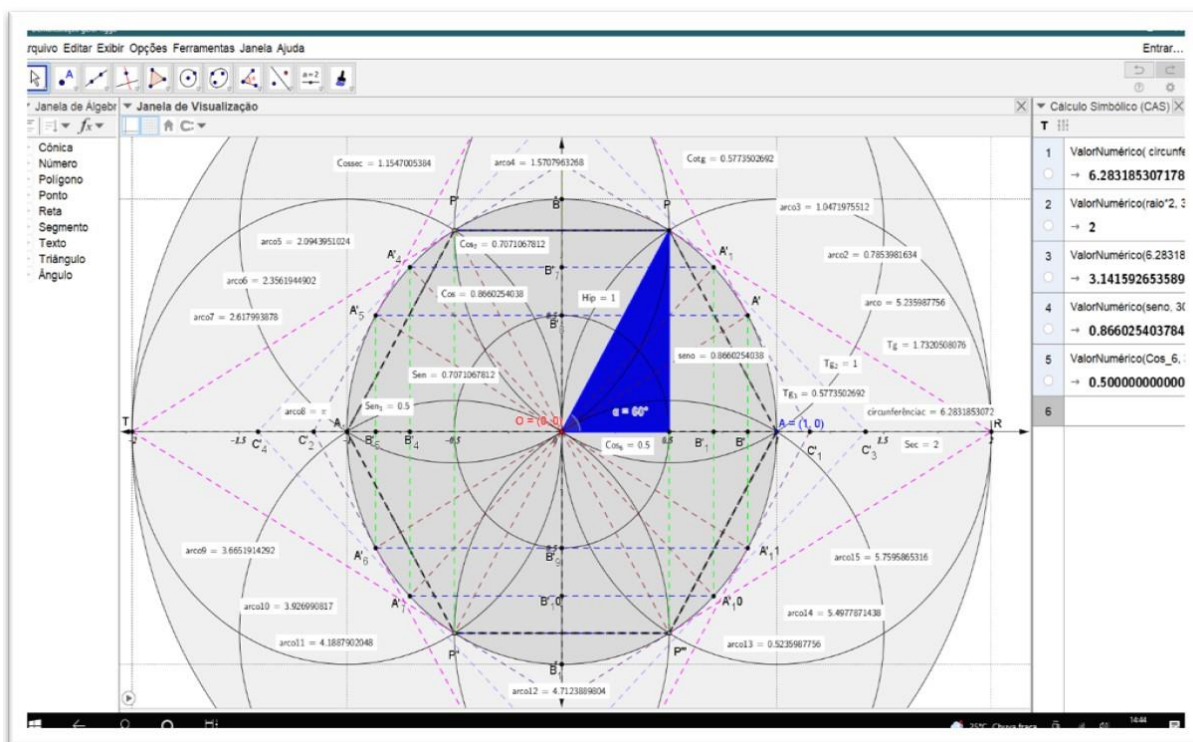
Definição do cosseno  $\alpha$ , como sendo razão e proporção entre o cateto adjacente a  $(\alpha)$ , e a hipotenusa do triângulo retângulo. Pode-se, portanto, definir uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , tal que a cada  $x$  associa em  $y = \cos \alpha$ .

Da definição da função  $y=f(x)=\cos x$ , decorre que o Domínio:  $D(F)=\mathbb{R}$ ; imagem:

$$IM (f x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

Figura 14. Demonstração dos quatro eixos das funções trigonométricas completas. Cosseno ( $\alpha=60^\circ$ )

$$C: x^2 + y^2 = 1$$



<b>Cosseno (<math>\alpha=60^\circ</math>)</b>	<b>Cateto adjacente</b> <b>hipotenusa</b>	<b><math>1/2 = \{0,5000000000000000\}</math></b>
---	--	--

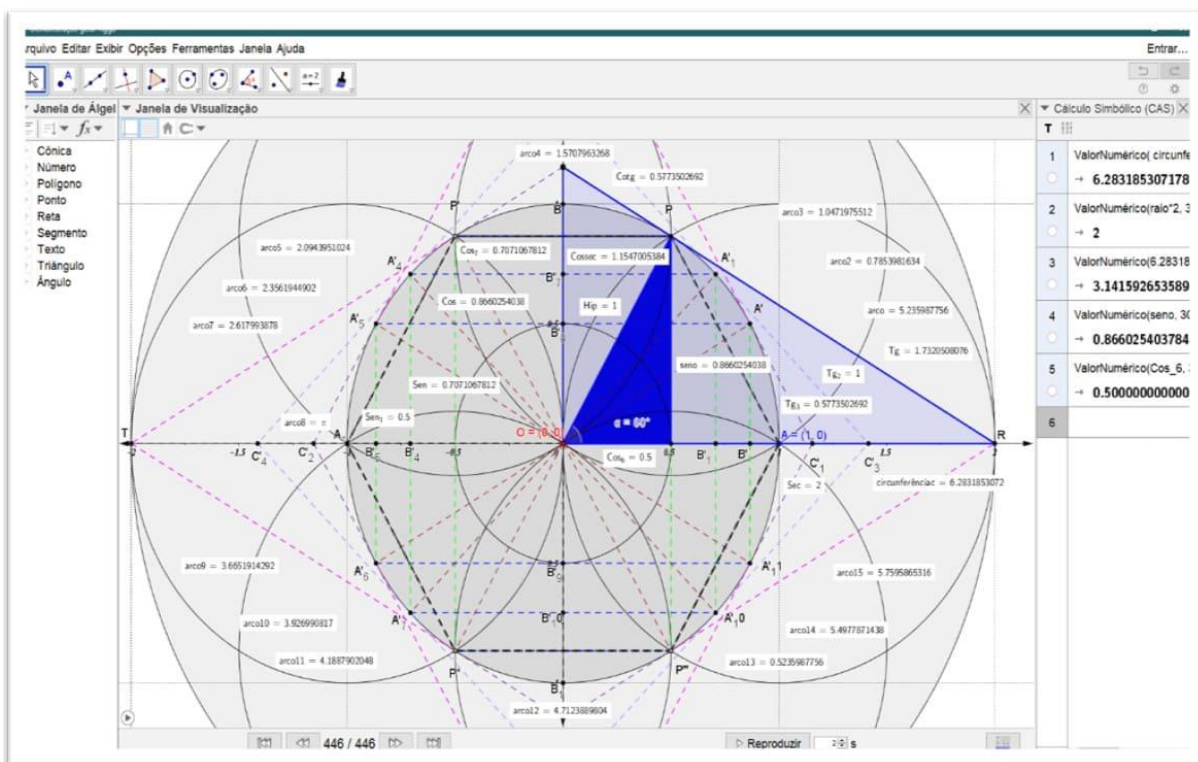
Hipotenusa	Sen a ( $60^\circ$ )	Cosseno ( $60^\circ$ )
$A^2 =$	$B^2 +$	$C^2$
$\{1.0000000000000000\}^2$	$\{0.86602540378489124\}^2$	$\{0.5000000000000000\}^2$
$\{1.0000000000000000\}$	$\{0.7500000000000000\}$	$\{0.2500000000000000\}$

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

### 2.4.3 TANGENTE

Definição da  $\alpha$  tangente, como sendo razão e proporção entre o cateto oposto ( $\alpha$ ) e cateto adjacente ( $\alpha$ ), e a hipotenusa do triângulo retângulo.

Figura 15. Demonstração dos quatro eixos das funções trigonométricas completas. Tangente ( $\alpha=60^\circ$ )  
 $C: x^2 + y^2 = 1$



<b>Tangente (<math>\alpha=60^\circ</math>)</b>	<b>Cateto oposto</b>	<b>=</b>	<b><math>\sqrt{3} = 1.732050807569782</math></b>
	<b>Cateto adjacente</b>		

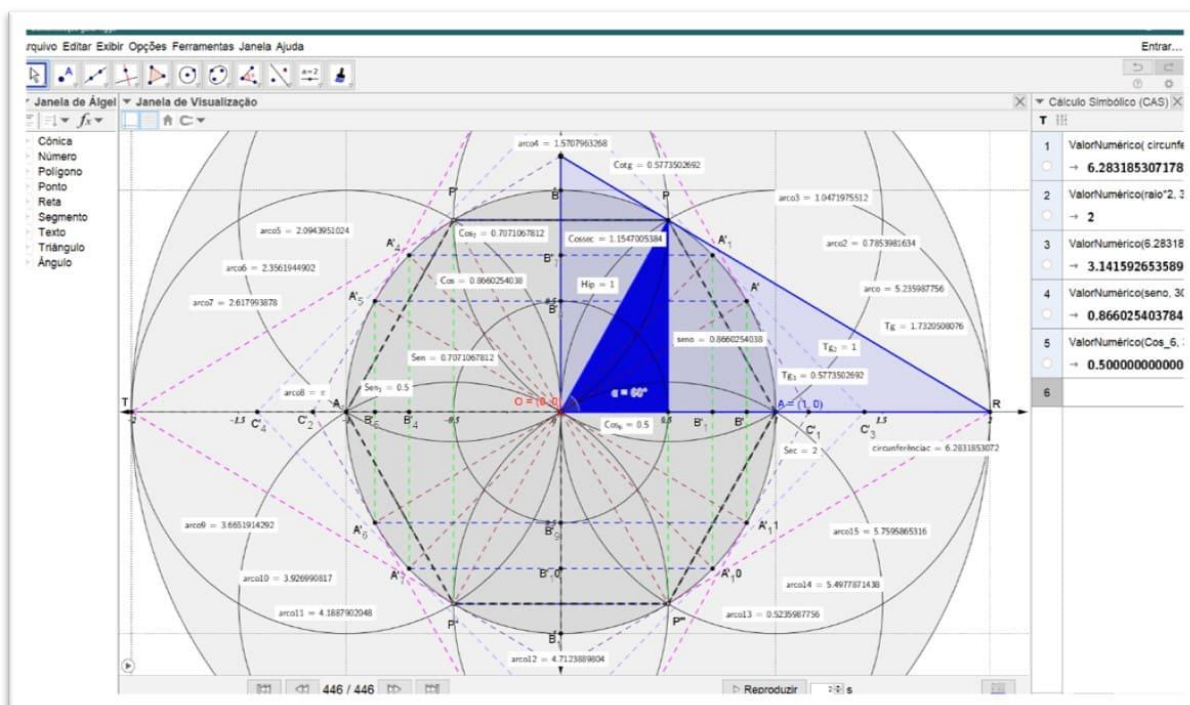
Hipotenusa	Seno $\alpha$ ( $60^\circ$ )	Cosseno ( $60^\circ$ )
$A^2 =$	$B^2 +$	$C^2$
{1.732050807569782}2	{0.86602540378489124}2	{1.5000000000000000}2
{3.0000000000000000}	{0.7500000000000000}	{2.2500000000000000}

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.4.4 COTANGENTE

Definição da cotangente ( $\alpha$ ) é o inverso da tangente, sendo a razão e proporção entre o cateto adjacente ( $\alpha$ ), e o cateto oposto ( $\alpha$ ), e a hipotenusa do triângulo retângulo.

Figura 16. Demonstração dos quatro eixos das funções trigonométricas completas. Cotangente ( $\alpha=60^\circ$ )  
 C:  $x^2 + y^2 = 1$



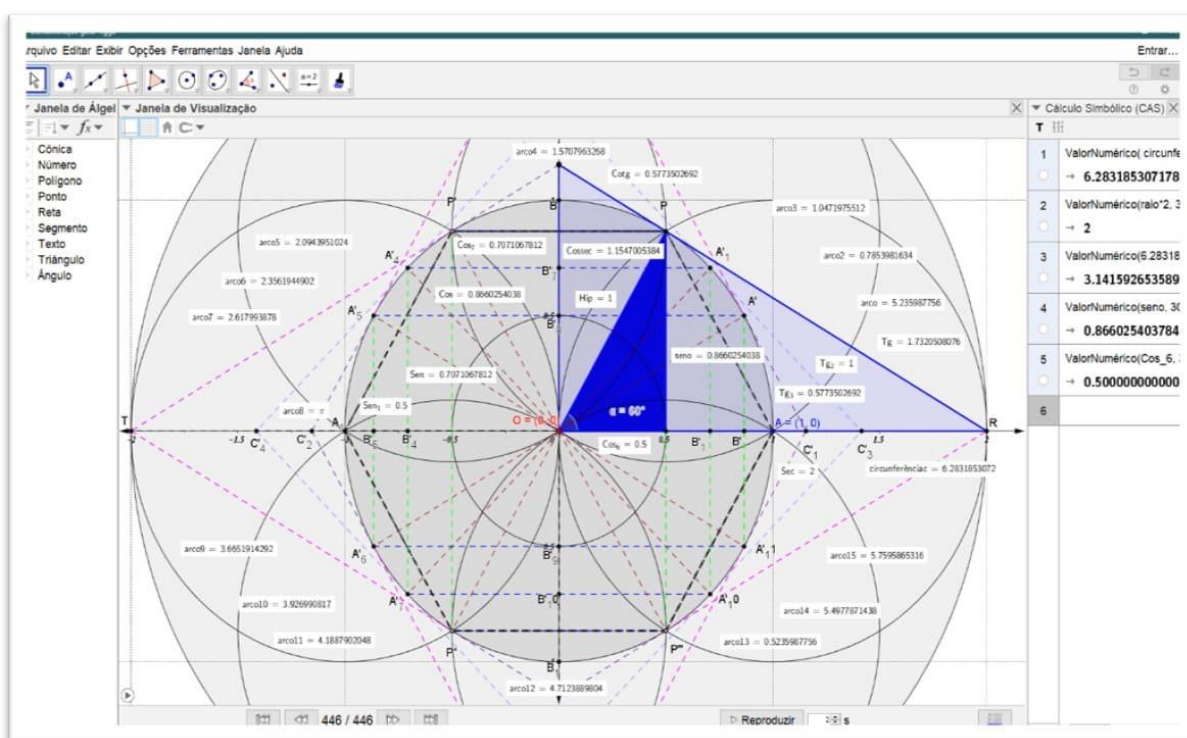
<b>Cotangente (<math>\alpha=60^\circ</math>)</b>	<b><math>\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Cateto oposto}}</math></b>	<b><math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math></b>	<b><math>=0,5773502691907518487...</math></b>
--	--	--	---

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

### 2.4.5 COSSECANTE

Definição de cossecante ( $\alpha$ ) é o inverso do seno, sendo a razão e proporção entre ( $\alpha$ ), a hipotenusa e o cateto oposto ( $\alpha$ ).

Figura 17. Demonstração dos quatro eixos das funções trigonométricas. Cossecante:  $C: x^2 + y^2 = 1$



<b>Cossecante (<math>\alpha=60^\circ</math>)</b>	<b><math>\frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto oposto}}</math></b>	<b><math>2\sqrt{3}/3</math></b>	<b><math>1.154700538378648...</math></b>
--	--	---------------------------------	--

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

### 2.4.6 SECANTE

Definição da secante ( $\alpha$ ), como a recíproca do cosseno, corresponde à razão e proporção da hipotenusa pelo cateto adjacente.



é um número irracional foi feita por Johann Lambert em 1761 e Legendre em 1794. O número  $\pi$  é um número transcendente, que foi provado por Ferdinand Lindemann em 1882.

### 2.5.1 PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

A extensão da circunferência, isto é, seu perímetro  $c$ , pode ser calculada através da equação.  $C = \pi * d$   $2 * \pi * r$ .

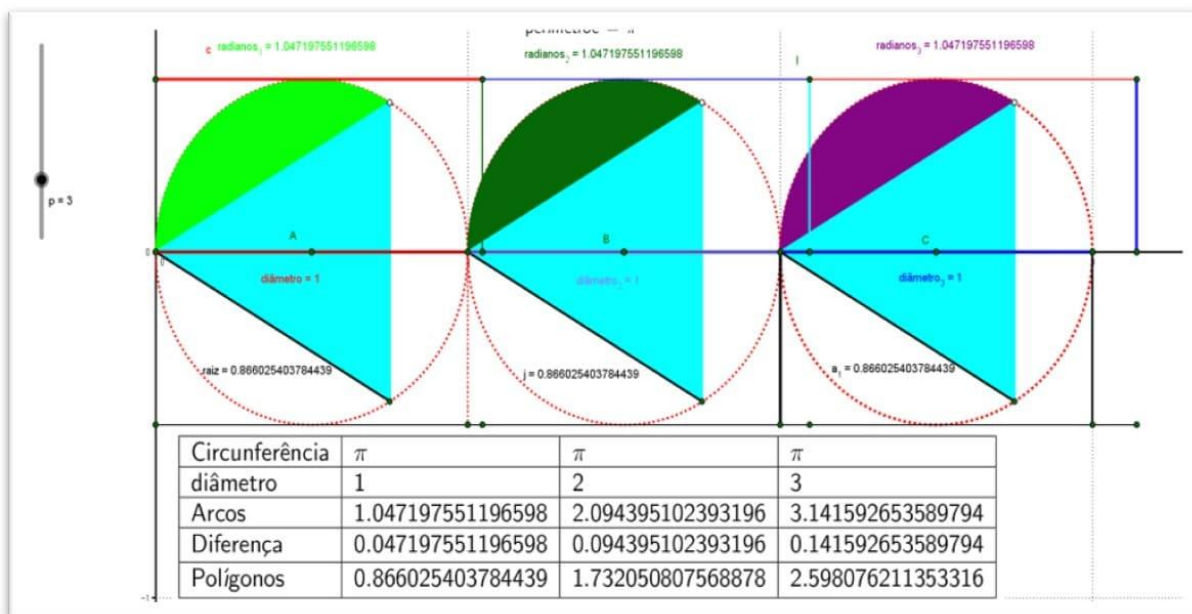
constant  $\pi(\pi) = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 389\ 171\ 543\ 687\ 321\ 706\ 908\ 213...$

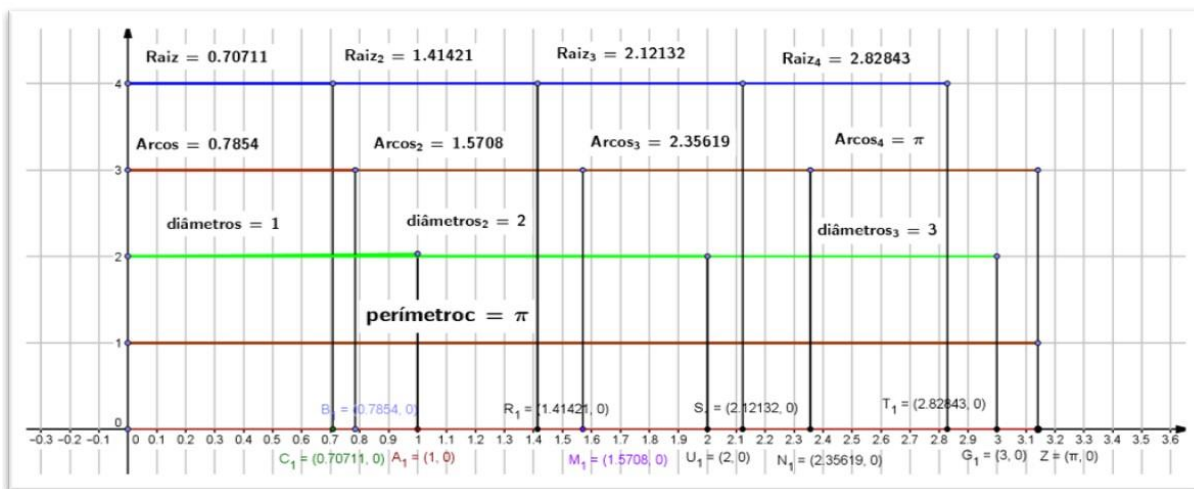
### 2.5.2 RACIONALIDADE CONSTANTE $\pi$

O círculo é a área interna ( $\alpha$ ), delimitada na circunferência, que pode ser calculada usando a equação.  $\text{Área}(a) = \pi * r^2$ .

$\text{Área}(2 * \pi) = 6.283\ 185\ 307\ 178\ 778\ 343\ 087\ 374\ 643\ 413\ 816\ 427\ 962...$

Figura 19. Demonstração e comparações da trisseção dos perímetros das circunferências





Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

### A busca pela racionalidade do π, algumas abordagens históricas

1900. a. C.	<u>Papiro Ahmes</u>	Egípcio	28/34 x 3,1605
1600 a. C.	<u>Tablet Susa</u>	Babilônio	25/8 x 3,125
600 a. C.	Na Bíblia (Reis I, 7:23)	Feijão	3.00
500 a. C.	<u>Bandhayana</u>	Índia	3.09
250 a. C.	Arquimedes de Siracusa	Grego	3 10/71 e 3 1/7
150	Cláudio Ptolomeu	Greco egípcio	377/120- 3.14166...
263	Liu Hui	China	3.14159
263	Ventilador Wang	China	157/50 x 3,14
300	Chang Hong	China	101/2 x 3,1623
500	Para <u>Chongzhi</u>	China	3.1415926 - 3.14159
500	<u>Aryabhata</u>	Índia	3.1416
600	Brahma Gupta	Índia	101/2 x 3,1623
800	<u>Al-Khurasimi</u>	Perdido	3.1416
1220	Fibonacci	Italiano	3.141818
1400	<u>Madhava</u>	Índia	3.14159265359
1424	<u>Al-Kashi</u>	Perdido	2π = 6,2831853071

Fonte: Número π – Wikipédia, enciclopédia livre, (2022).





### 2.5.3 MÉTODOS CLÁSSICOS DA BABILÔNIA (2000 B. C)

Os arqueólogos têm trabalhado na Mesopotâmia sistematicamente desde antes de meados do século 19 e desenterraram mais de meio milhão de tábuas de argila, das quais quatrocentas foram identificadas como estritamente matemáticas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e algumas universidades como Yale, Columbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas praças, que são variáveis em tamanho e de aproximadamente um centímetro e meio de espessura. Eles são muitas vezes de formas arredondadas, com escritos cuneiformes em apenas um de seus rostos, e às vezes em ambos.

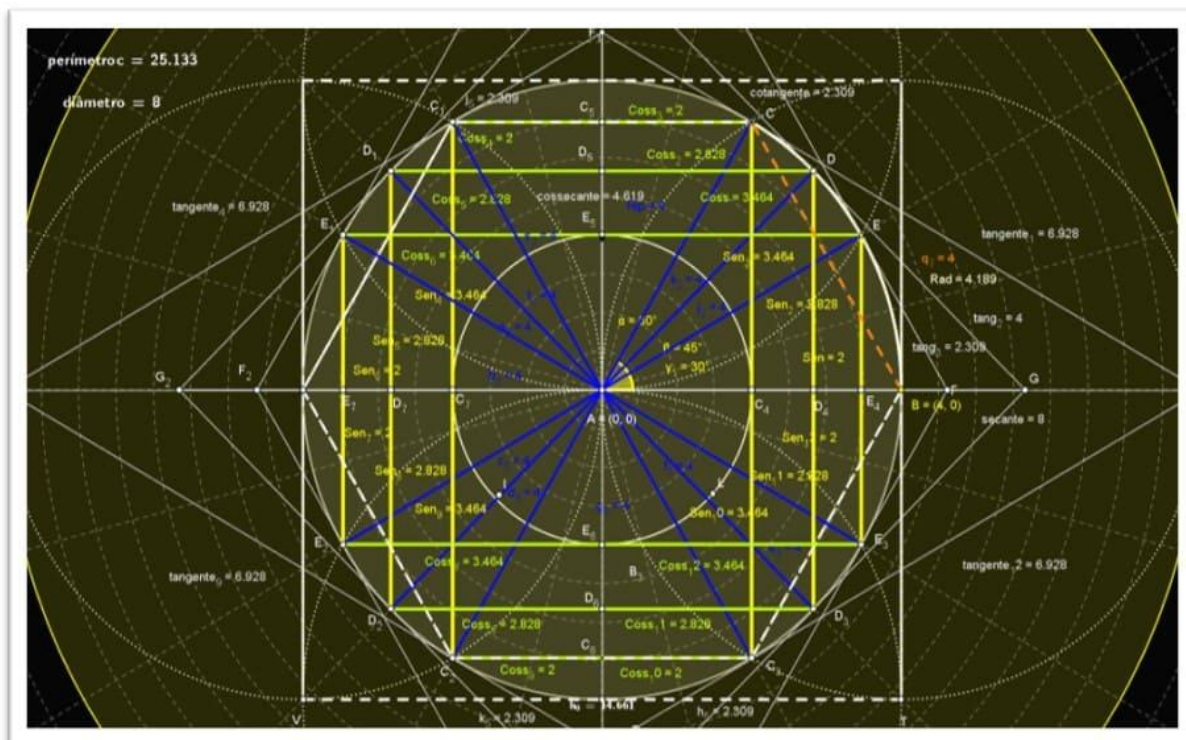
O número de frações contínuas  $\pi$  habitar aproximadamente

$$\frac{6 * L}{2 * \pi * L} \approx 0,96 \leftrightarrow \frac{3}{\pi} \approx 0,96 \leftrightarrow (\pi \approx \frac{25}{8} \approx 3,125...)$$

O número da fração contínua  $\pi$ , racional periódico infinito

$$\frac{6 * L}{2 * \pi * L} = 0.95492 ... \leftrightarrow \frac{3}{\pi} = 0.95492 ... \leftrightarrow (\pi = \frac{25.1327412287...}{8.0000000000...} = \pi)$$

Figura 20. Demonstração da divisão do método clássico da Babilônia da circunferência



<b>Círculos</b>	<b>{Perímetro c,30}</b>	<b>= 25.1327412287185230659355502185</b>
<b>Diâmetro</b>	<b>{Diâmetro. 30}</b>	<b>= 8.000000000000000000000000000000</b>
<b>Divisão</b>	<b>{Constante p,30}</b>	<b>= 3.14159265358938917154368732171</b>

Métodos de cálculos por polígonos com valores aproximados irracionais

<b>Polígonos</b>	<b>{lados,30}</b>	<b>≈ 4.000000000000000000000000000000</b>
<b>Círculos</b>	<b>{Perímetro c,30}</b>	<b>≈ 25.000000000000000000000000000000</b>
<b>Perímetros</b>	<b>{Lados* p,06}</b>	<b>≈ 24.000000000000000000000000000000</b>
<b>divisão</b>	<b>{Perímetro/ Lados*06}</b>	<b>≈ 1.000000000000000000000000000000</b>

Métodos de cálculos por arcos de circunferência com valores exatos racionais

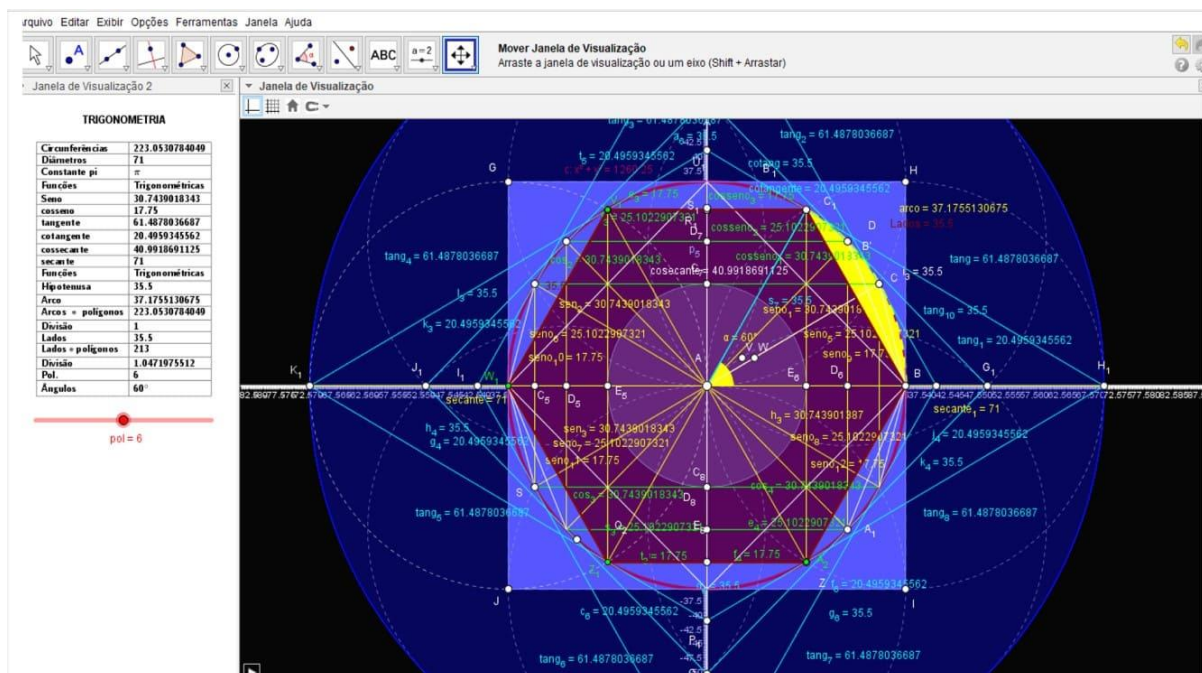
<b>Arcos Ângulos</b>	<b>{Radianos,30}</b>	<b>= 4.18879020478585222872491642895</b>
<b>Círculos</b>	<b>{Perímetro c, 30}</b>	<b>=25.1327412287185230659355502185</b>
<b>Perímetros</b>	<b>{Rad. 30 *06}</b>	<b>=25.1327412287185230659355502185</b>
<b>Divisão racional</b>	<b>{Perímetro/ Lados*06}</b>	<b>=0.000000000000000000000000000000</b>

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).[





Figura 22. Demonstração dos métodos clássicos de Arquimedes



Seja  $x$  um número racional. Assim, consideremos a fração contínua  $x$ , convergente e ilimitada, que  $a$  e  $b$  são números reais para  $b \neq 0$ .

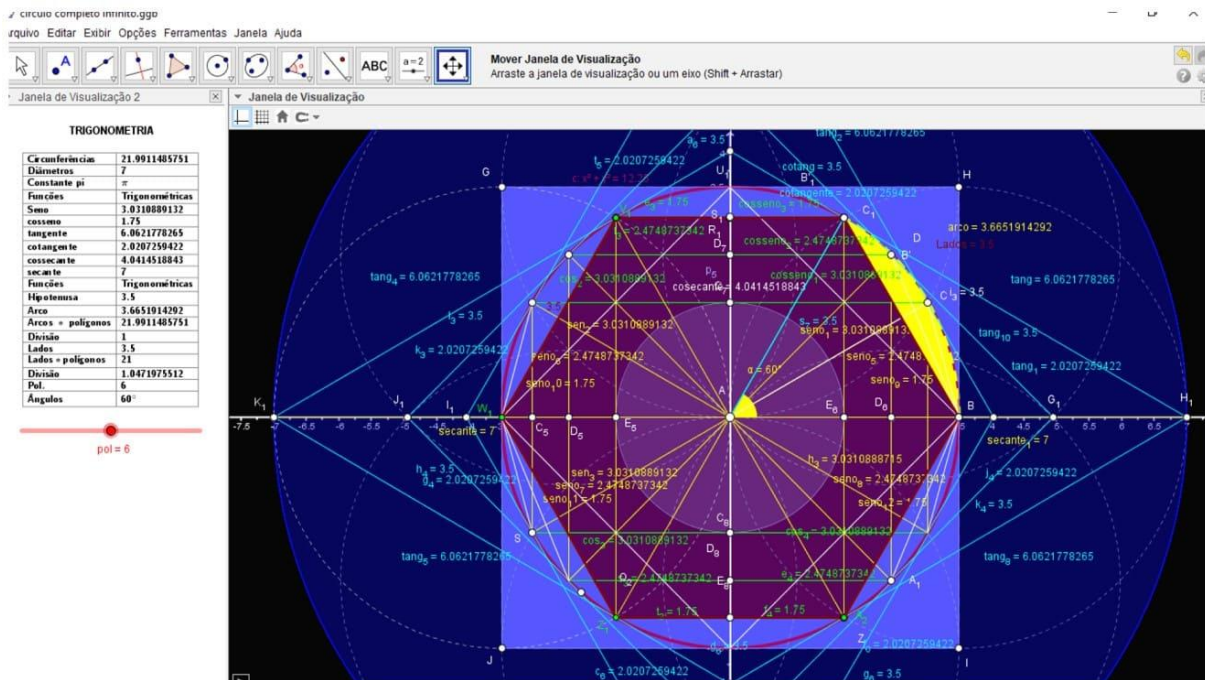
Circunferências =223.	Diâmetros=71.	Divisões
$3 + \frac{10}{71}$	$\frac{223.131...}{71.025...}$	$\pi=3,141...$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	223.0530784049	446.1061568098	669.1592352146	892.2123136195	1115.2653920...	1338.3184704...	1561.3715488...	1784.424627239	2007.4777056...	2230.5307840...
2	Diâmetros	71	142	213	284	355	426	497	568	639	710
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Senô	30.7439018343	61.4878036687	92.231705503	122.9756073374	153.7195091717	184.4634110061	215.2073128404	245.9512146748	276.6951165091	307.4390183435
6	Cosseno	17.75	35.5	53.25	71	88.75	106.5	124.25	142	159.75	177.5
7	Tangente	61.4878036687	122.9756073374	184.4634110061	245.9512146748	307.4390183435	368.9268220122	430.4146256809	491.9024293496	553.3902330183	614.878036687
8	Cotangente	20.4959345562	40.9918691125	61.4878036687	81.9837382249	102.4796727812	122.9756073374	143.4715418936	163.9674764499	184.4634110061	204.9593455623
9	Cossecante	40.9918691125	81.9837382249	122.9756073374	163.9674764499	204.9593455623	245.9512146748	286.9430837872	327.9349528997	368.9268220122	409.9186911246
10	Secante	71	142	213	284	355	426	497	568	639	710
11	Radianos	37.1755130675	74.351026135	111.5265392024	148.7020522699	185.8775653374	223.0530784049	Divisão	Radianos	223.0530784049	0
12	Polígonos	35.5	71	106.5	142	177.5	213	Divisão	Polígonos	213	10.0530784049
13	Diferença	1.6755130675	3.351026135	5.0265392024	6.7020522699	8.3775653374	10.0530784049	Divisão	B1-G11-12	valores	Total
14	Raiz de 2	50.2045814642	100.4091629285	150.6137443927	200.818325857	251.0229073212	301.2274887855	351.4320702497	401.636651714	451.8412331782	502.0458146424
15	Raiz de 2/2	25.1022907321	50.2045814642	75.3068721964	100.4091629285	125.5114536606	150.6137443927	175.7160351249	200.818325857	225.9206165891	251.0229073212
16	P/Q=2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 23. Os métodos clássicos de Arquimedes com valores racionais





Seja  $\pi$  um número racional. Assim, consideremos a fração  $\pi$ , convergente e ilimitada, de que  $a$  e  $b$  são números reais para  $b \neq 0$ .

<b>Circunferências = 22.</b>	<b>Diâmetros=7.</b>	<b>Divisões</b>
$3 + \frac{1}{7}$	$\frac{22.02...}{7.01...}$	$\pi=3,141...$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	21.9911485751	43.9822971503	65.9734457254	87.9645943005	109.9557428756	131.9468914508	153.9380400259	175.929188601	197.9203371762	219.9114857513
2	Diâmetros	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	3.0310889132	6.0621778265	9.0932667397	12.124355653	15.1554445662	18.1865334795	21.2176223927	24.248711306	27.2798002192	30.3108891325
6	Cosseno	1.75	3.5	5.25	7	8.75	10.5	12.25	14	15.75	17.5
7	Tangente	6.0621778265	12.124355653	18.1865334795	24.248711306	30.3108891325	36.3730669589	42.4352447854	48.4974226119	54.5596004384	60.6217782649
8	Cotangente	2.0207259422	4.0414518843	6.0621778265	8.0829037687	10.1036297108	12.124355653	14.1450815951	16.1658075373	18.1865334795	20.2072594216
9	Cossecante	4.0414518843	8.0829037687	12.124355653	16.1658075373	20.2072594216	24.248711306	28.2901631903	32.3316150746	36.3730669589	40.4145188433
10	Secante	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
11	Radianos	3.6651914292	7.3303828584	10.995742876	14.6607657168	18.3259571459	21.9911485751	Divisão	Radianos	21.9911485751	0
12	Poligonos	3.5	7	10.5	14	17.5	21	Divisão	Poligonos	21	0.9911485751
13	Diferença	0.1651914292	0.3303828584	0.4955742876	0.6607657168	0.8259571459	0.9911485751	Divisão	B1-G11-12	valores	Total
14	Raiz de 2	4.9497474683	9.8994949366	14.8492424049	19.7989898732	24.7487373415	29.6984848098	34.6482322781	39.5979797464	44.5477272148	49.4974746831
15	Raiz de 2/2	2.4748737342	4.9497474683	7.4246212025	9.8994949366	12.3743686708	14.8492424049	17.3241161391	19.7989898732	22.2738636074	24.7487373415
16	P/Q=2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.6 ARCOS E ÂNGULOS DE CIRCUNFERÊNCIA (GRAU E RADIANOS)

A circunferência em que são tomados dois pontos A e B. A circunferência ficará dividida em duas partes chamadas arcos. Os pontos A e B são as extremidades desses arcos. Quando A e B coincidem, um desses arcos é chamado nulo e o outro, arco de uma volta, diremos que o arco nulo tem por medida  $0^\circ$  e o arco de uma volta

tem por medida  $360^\circ$ . Dessa forma:  $1 \text{ grau}(1^\circ) = \frac{1}{360}$  do arco de uma volta. Como







circulo completo inrinito.ggo

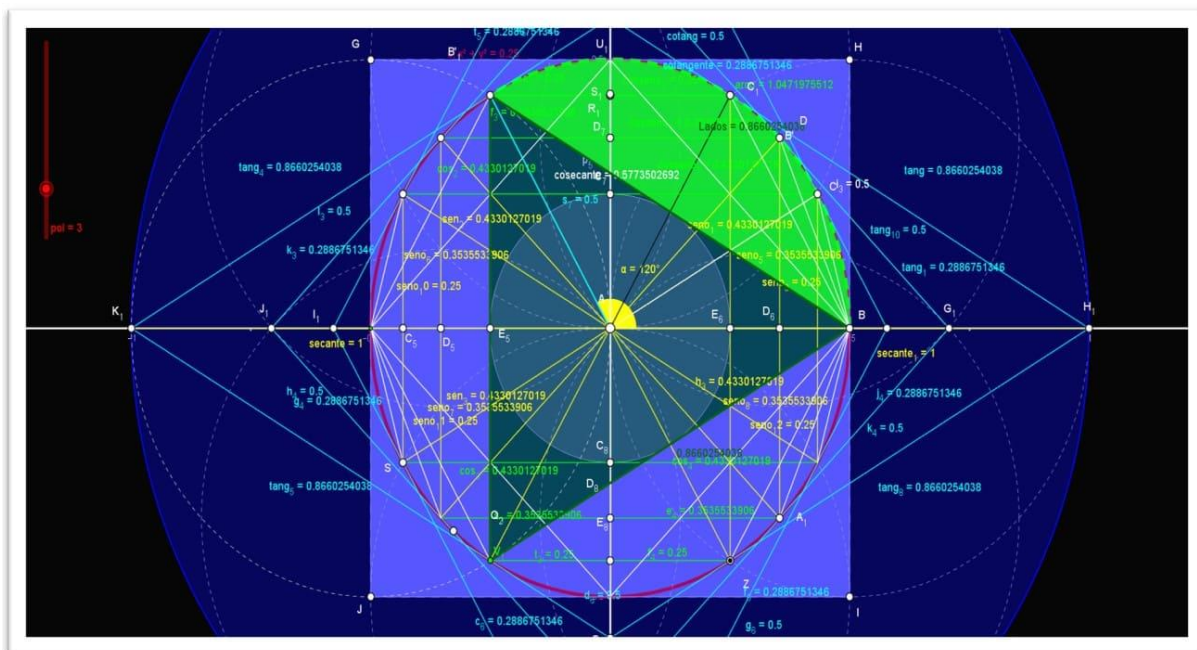
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	1.5707963268	$\pi$	4.7123889804	6.2831853072	7.853981634	9.4247779608	10.9955742876	12.5663706144	14.1371669412	15.7079632679
12	Poligonos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	Diferença	0.5707963268	1.1415926536	1.7123889804	2.2831853072	2.853981634	3.4247779608	3.9955742876	4.5663706144	5.1371669412	5.7079632679

24°C Pred ens... 17:19

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 25. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais



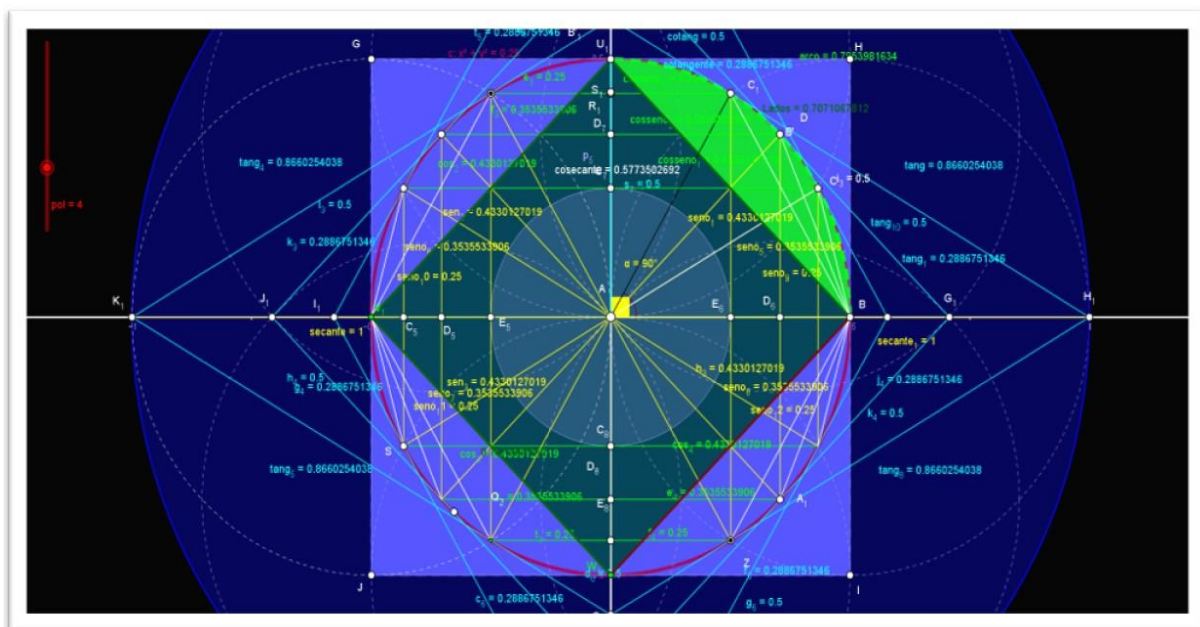
circulo completo intmto.ggp

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	1.0471975512	2.0943951024	3.1415926536	4.1887902048	5.235987756	6.2831853072	7.3303828584	8.3775804096	9.424779608	10.471975512
12	Poligonos	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
13	Diferença	0.1811721474	0.3623442948	0.5435164422	0.7246885896	0.9058607371	1.0870328845	1.2682050319	1.4493771793	1.6305493267	1.8117214741

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 26. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais

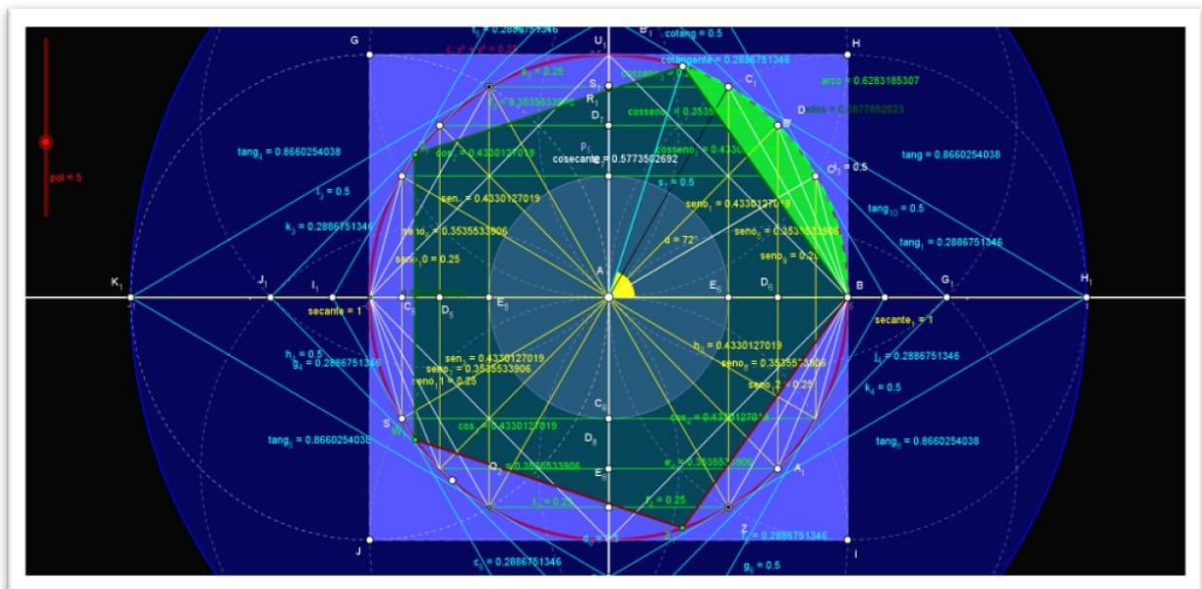


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495599215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.7853981634	1.5707963268	2.3561944902	$\pi$	3.926990817	4.7123889804	5.4977871438	6.2831853072	7.0685834706	7.853981634
12	Polígonos	0.7071067812	1.4142135624	2.1213203436	2.8284271247	3.5355339059	4.2426406871	4.9497474683	5.6568542495	6.3639610307	7.0710678119
13	Diferença	0.0782913822	0.1565827644	0.2348741466	0.3131655288	0.3914569111	0.4697482933	0.5480396755	0.6263310577	0.7046224399	0.7829138221

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

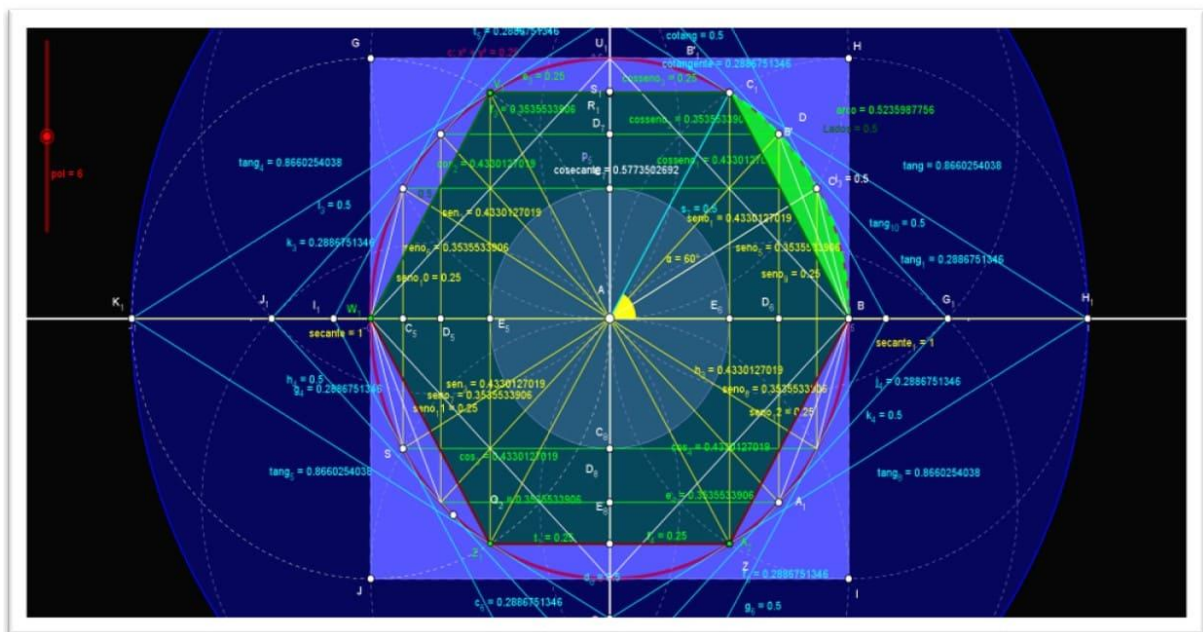
Figura 27. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.6283185307	1.2566370614	1.884955922	2.5132741229	$\pi$	3.7699111843	4.398229715	5.0265482457	5.6548667765	6.2831853072
12	Polígonos	0.5877852523	1.1755705046	1.7633557569	2.3511410092	2.9389262615	3.5267115138	4.114496766	4.7022820183	5.2900672706	5.8778525229
13	Diferença	0.0405332784	0.0810665569	0.1215998353	0.1621331137	0.2026663921	0.2431996706	0.283732949	0.3242662274	0.3647995058	0.4053327843

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 28. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais

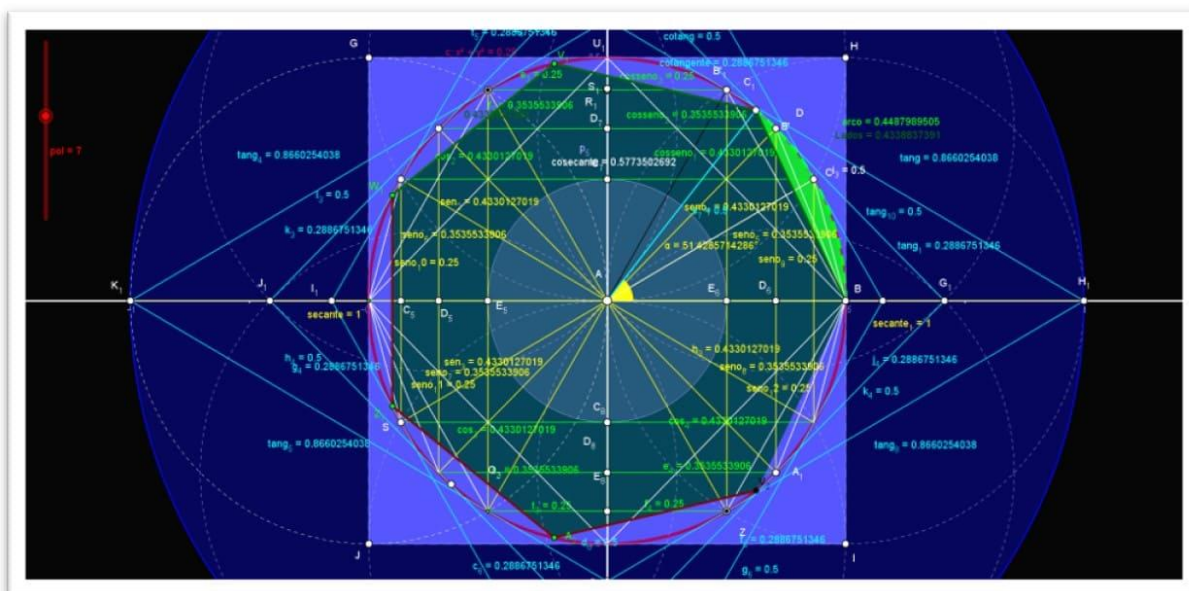


circulo completo immitto.ggp  
 arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0821778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.5235987756	1.0471975512	1.5707963268	2.0943951024	2.617993878	$\pi$	3.6651914292	4.1887902048	4.7123889804	5.235987756
12	Poligonos	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
13	Diferença	0.0235987756	0.0471975512	0.0707963268	0.0943951024	0.117993878	0.1415926536	0.1651914292	0.1887902048	0.2123889804	0.235987756

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 29. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais



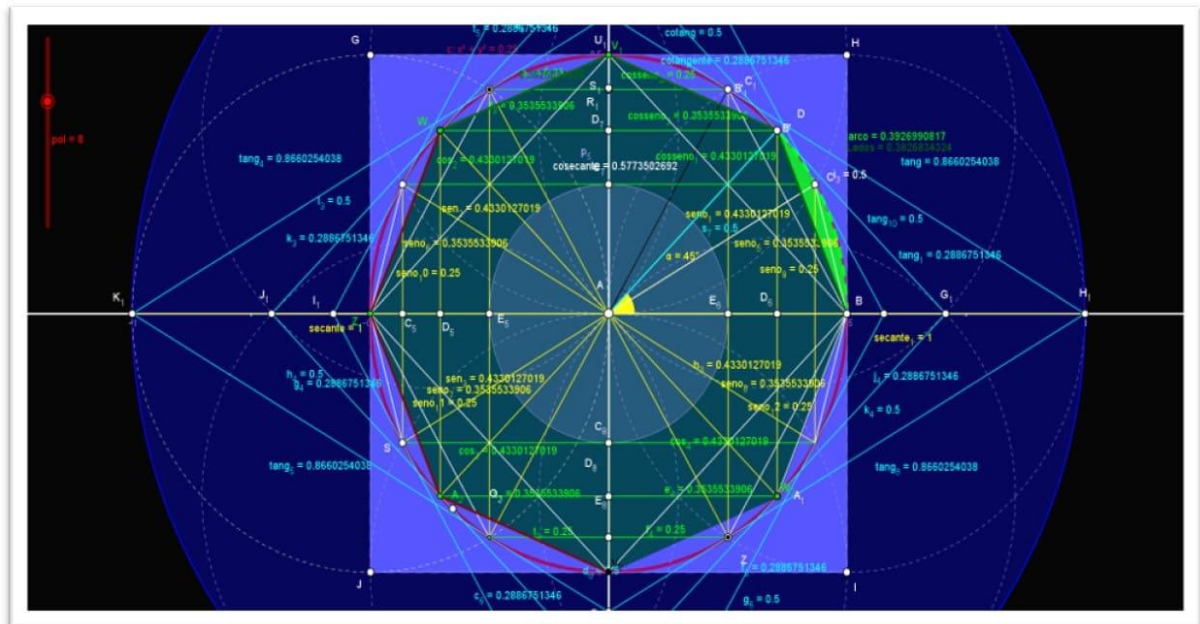
circulo completo imnito.ggo

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Senô	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980782114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980782114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980782114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.4487989505	0.897597901	1.3463968515	1.7951958021	2.2439947526	2.6927937031	$\pi$	3.5903916041	4.0391905546	4.4879895051
12	Polígonos	0.4338837391	0.8677674782	1.3016512174	1.7355349565	2.1694186956	2.6033024347	3.0371861738	3.4710699129	3.9049536521	4.3388373912
13	Diferença	0.0149152114	0.0298304228	0.0447456342	0.0596608456	0.074576057	0.0894912684	0.1044064798	0.1193216912	0.1342369026	0.149152114

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

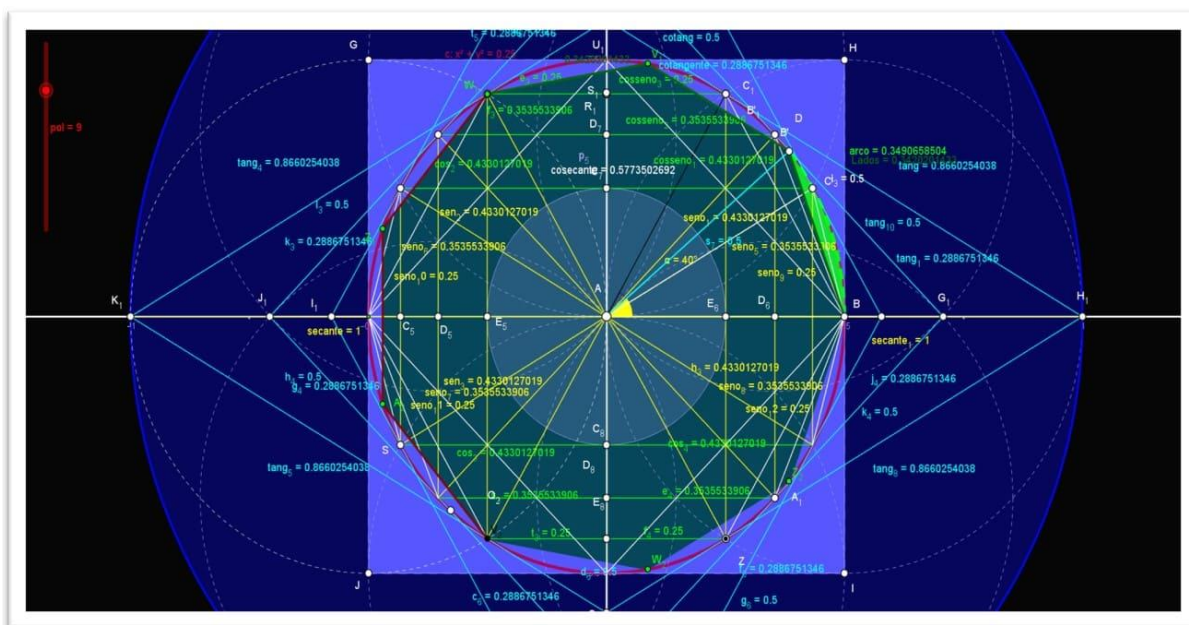
Figura 30. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0821778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.3826990817	0.7653981634	1.1780972451	1.5707963268	1.9634954085	2.3561944902	2.7488935719	$\pi$	3.5342917353	3.926990817
12	Polígonos	0.3826834324	0.7653668647	1.1480502971	1.5307337295	1.9134171618	2.2951005942	2.6787840266	3.0614574589	3.4441508913	3.8268343237
13	Diferença	0.0100156493	0.0200312987	0.030046948	0.0400625973	0.0500782467	0.060093896	0.0701095453	0.0801251947	0.090140844	0.1001564933

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 31. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais

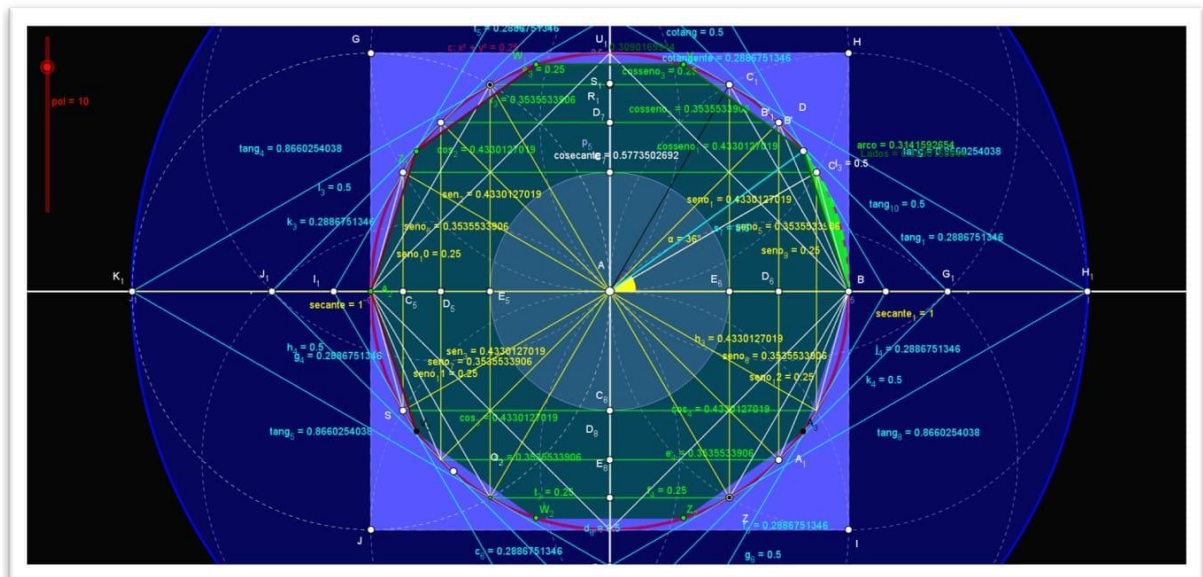


circulo completo imrnto.ggo  
 arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.3490658504	0.6981317008	1.0471975512	1.3962634016	1.745329252	2.0943951024	2.4434609528	2.7925268032	$\pi$	3.490658504
12	Polígonos	0.3420201433	0.6840402867	1.02606043	1.3680805733	1.7101007166	2.05212086	2.3941410033	2.7361611466	3.0781812899	3.4202014333
13	Diferença	0.0070457071	0.0140914141	0.0211371212	0.0281828283	0.0352285354	0.0422742424	0.0493199495	0.0563656566	0.0634113637	0.0704570707

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 32. Demonstração entre circunferências e seus diâmetros valores racionais



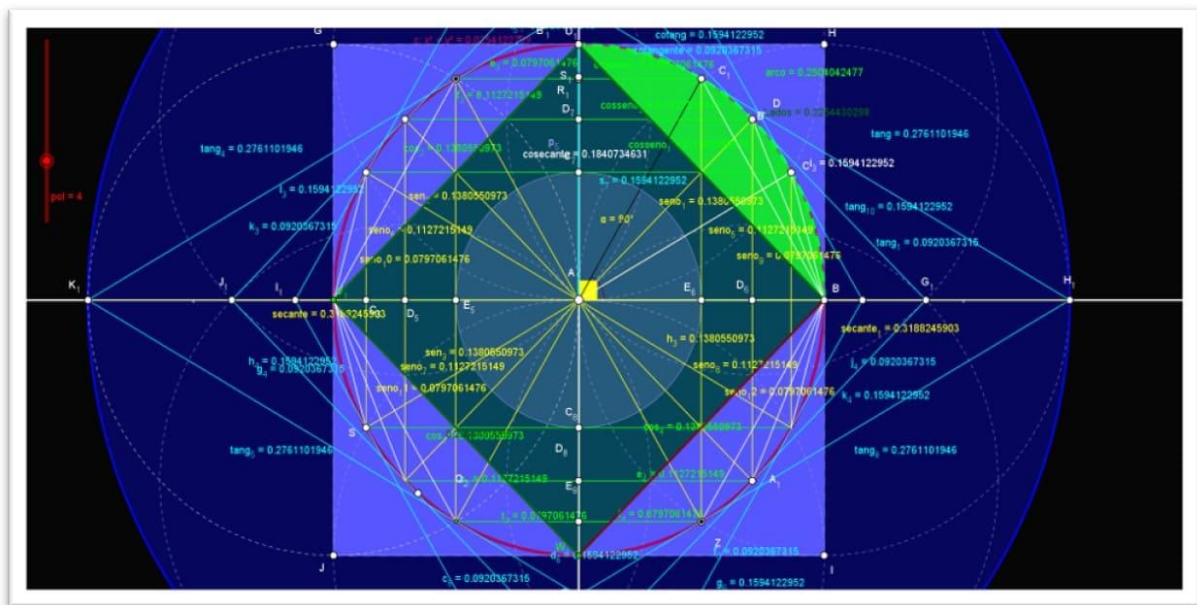


J círculo completo infinito.ggb  
 arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferências	$\pi$	6.2831853072	9.4247779608	12.5663706144	15.7079632679	18.8495559215	21.9911485751	25.1327412287	28.2743338823	31.4159265359
2	Diâmetros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Divisão(B1/B2)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.4330127019	0.8660254038	1.2990381057	1.7320508076	2.1650635095	2.5980762114	3.0310889132	3.4641016151	3.897114317	4.3301270189
6	Cosseno	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
7	Tangente	0.8660254038	1.7320508076	2.5980762114	3.4641016151	4.3301270189	5.1961524227	6.0621778265	6.9282032303	7.7942286341	8.6602540378
8	Cotangente	0.2886751346	0.5773502692	0.8660254038	1.1547005384	1.443375673	1.7320508076	2.0207259422	2.3094010768	2.5980762114	2.8867513459
9	Cossecante	0.5773502692	1.1547005384	1.7320508076	2.3094010768	2.8867513459	3.4641016151	4.0414518843	4.6188021535	5.1961524227	5.7735026919
10	Secante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	Radianos	0.3141592654	0.6283185307	0.9424777961	1.2566370614	1.5707963268	1.8849555922	2.1991148575	2.5132741229	2.8274333882	$\pi$
12	Polígonos	0.3090169944	0.6180339887	0.9270509831	1.2360679775	1.5450849719	1.8541019662	2.1631189606	2.472135955	2.7811529494	3.0901699437
13	Diferença	0.005142271	0.010284542	0.015426813	0.0205690839	0.0257113549	0.0308536259	0.0359958969	0.0411381679	0.0462804389	0.0514227098

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 33. Demonstração da divisão racional provando com cálculos (0,9999...≠1)





	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Circunferê...	1.00042	2.00084	3.00126	4.00168	5.0021	6.00252	7.00294	8.00336	9.00379	10.00421
2	Diâmetros	0.31844	0.63689	0.95533	1.27378	1.59222	1.91066	2.22911	2.54755	2.86599	3.18444
3	Divisão(B1...	3.14159	3.14159	$\pi$	3.14159	3.14159	$\pi$	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159
4	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante	Constante
5	Seno	0.13789	0.27578	0.41367	0.55156	0.68945	0.82734	0.96523	1.10312	1.24101	1.3789
6	Cosseno	0.07961	0.15922	0.23883	0.31844	0.39805	0.47767	0.55728	0.63689	0.7165	0.79611
7	Tangente	0.27578	0.55156	0.82734	1.10312	1.3789	1.65468	1.93046	2.20624	2.48202	2.7578
8	Cotangente	0.09193	0.18385	0.27578	0.36771	0.45963	0.55156	0.64349	0.73541	0.82734	0.91927
9	Cossecante	0.18385	0.36771	0.55156	0.73541	0.91927	1.10312	1.28698	1.47083	1.65468	1.83854
10	Secante	0.31844	0.63689	0.95533	1.27378	1.59222	1.91066	2.22911	2.54755	2.86599	3.18444
11	Radianos	0.16674	0.33347	0.50021	0.66695	0.83368	1.00042	1.16716	1.33389	1.50063	1.66737
12	Poligonos	0.15922	0.31844	0.47767	0.63689	0.79611	0.95533	1.11455	1.27378	1.433	1.59222
13	Diferença	0.00751	0.01503	0.02254	0.03006	0.03757	0.04509	0.0526	0.06012	0.06763	0.07515

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.7 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS E DA RAIZ

### QUADRADA RACIONAL $\sqrt{2}$

O teorema de Pitágoras leva o nome do Grego Pitágoras (570 a.C-495 a.C.). A definição do teorema é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo. A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos  $a^2 + b^2 = c^2$ .

## 2.8 A DIAGONAL (D) DO QUADRADO

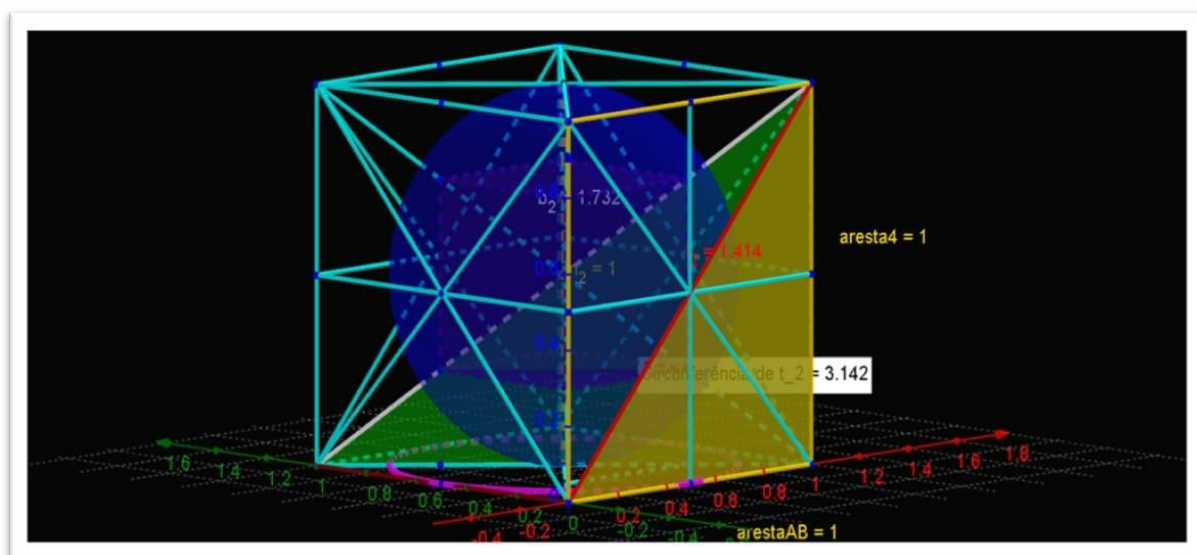
Pitágoras sabia na época, entretanto, que seu teorema tinha uma falha. Quando os catetos do triângulo eram iguais, seu teorema não funcionava, pois não haveria uma medida irracional para a hipotenusa  $\sqrt{2}$ . Matemáticos que o sucederam desde aquela época tentavam compreender o porquê da incomensurabilidade, os lados do triângulo

não tinham medida em comum, não podiam ser medidos de forma exata através de uma unidade comum a ambos.

Com efeito, suponha que seja a hipotenusa ( $p$ ), os catetos sejam iguais e representados pela letra ( $q$ ). Sabe-se que  $p/q$  é uma fração irredutível, restando um numerador par e um denominador ímpar, ou vice-versa. Da aplicação do teorema resulta ( $p^2 = 2q^2$ ). Obviamente ( $p^2$ ) é par, pois é o dobro de ( $q^2$ ), ou seja, vem de um produto de um número multiplicado por 2. Se  $p^2$  é par, implica que  $p$  é par (o quadrado de um número par é sempre número par e o quadrado de um número ímpar é sempre número ímpar), logo ( $q$ ) obrigatoriamente deve ser ímpar, senão a fração dada acima não seria irredutível. Fazendo agora ( $p = 2k$ ), pois  $p$  é par, reescrevemos:  $(2k)^2 = (2q)^2$ , simplificando resulta ( $4k^2 = 2q^2$ ) que resulta ( $2k^2 = q^2$ ).

Vamos calcular a diagonal ( $d$ ) do quadrado em função do lado  $L$ . O problema pode também ser formulado assim: dado o lado  $L$ , calcule a diagonal ( $d$ ). Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos calcular a hipotenusa a partir dos quadrados dos catetos  $d^2 = 1^2 + 1^2 \leftrightarrow d = \sqrt{2}$ .

Figura 34. Demonstrações dos resultados do teorema de Pitágoras racional





$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{1.414\ 213\ 562\ 372\ 821\ 413\ 772\ 808\ 569\ 450\dots}{0.707\ 106\ 781\ 185\ 750\ 093\ 488\ 541\ 834\ 057\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(1.414\ 213\ 562\dots) 2$	$(1)2$	$(1)2$
<b>Resultados</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{2.828\ 427\ 124\ 745\ 642\ 827\ 545\ 617\ 138\ 900\dots}{1.414\ 213\ 562\ 372\ 821\ 413\ 772\ 808\ 569\ 450\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(2.828\ 427\ 125\dots) 2$	$(2)2$	$(2)2$
<b>Resultados</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{4.242\ 640\ 687\ 119\ 144\ 301\ 359\ 040\ 778\ 953\dots}{2.121\ 320\ 343\ 559\ 572\ 150\ 679\ 520\ 389\ 476\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(4.242\ 640\ 687\dots) 2$	$(3)2$	$(3)2$
<b>Resultados</b>	<b>18</b>	<b>9</b>	<b>9</b>
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{5.656\ 854\ 249\ 491\ 986\ 986\ 576\ 020\ 191\ 374\dots}{2.828\ 427\ 124\ 745\ 642\ 827\ 545\ 617\ 138\ 900\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(5.656\ 854\ 249\dots) 2$	$(4)2$	$(4)2$
<b>Resultados</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>16</b>
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{7.071\ 067\ 811\ 865\ 709\ 985\ 751\ 819\ 284\ 967\dots}{3.535\ 533\ 905\ 931\ 305\ 254\ 598\ 560\ 509\ 792\dots} = 2$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(7.071\ 067\ 812\dots) 2$	$(5)2$	$(5)2$
<b>Resultados</b>	<b>50</b>	<b>25</b>	<b>25</b>



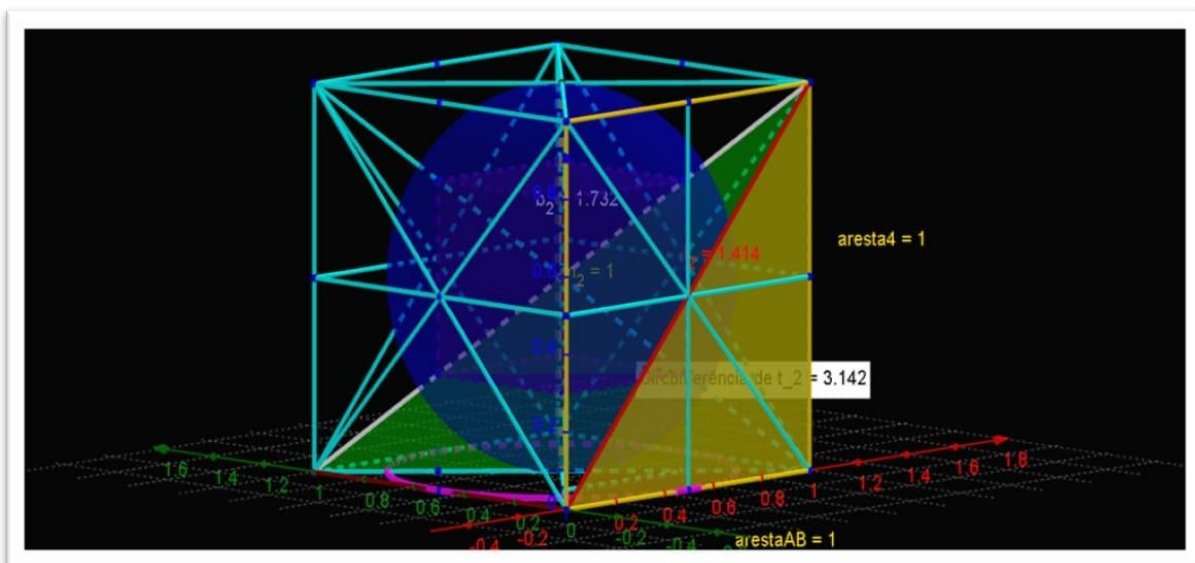
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{8.485\ 281\ 374\ 238\ 288\ 602\ 718\ 081\ 557\ 907\dots}{4.242\ 640\ 687\ 119\ 144\ 301\ 359\ 040\ 778\ 953\dots} = 2$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(8.485\ 281\ 374\dots)^2$	$(6)2$	$(6)2$
Resultados	72	36	36
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{9.899\ 494\ 936\ 611\ 993\ 980\ 052\ 546\ 998\ 954\dots}{4.949\ 747\ 468\ 305\ 996\ 990\ 026\ 273\ 499\ 477\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(9.899\ 494\ 937\dots)^2$	$(7)2$	$(7)2$
Resultados	98	49	49
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{11.313\ 708\ 498\ 984\ 581\ 013\ 073\ 662\ 232\ 124\dots}{5.656\ 854\ 249\ 491\ 986\ 986\ 576\ 020\ 191\ 374\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(11.313\ 708\ 5\dots)^2$	$(8)2$	$(8)2$
Resultados	128	64	64
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{12.727\ 922\ 061\ 357\ 432\ 904\ 077\ 122\ 336\ 860\dots}{6.363\ 961\ 030\ 678\ 716\ 452\ 038\ 561\ 168\ 430\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(12.727\ 922\ 06\dots)^2$	$(9)2$	$(9)2$
Resultados	162	81	81
$\frac{p}{q} = 2.$	$\frac{14.142\ 135\ 623\ 731\ 419\ 971\ 503\ 638\ 569\ 934\dots}{7.071\ 067\ 811\ 865\ 709\ 985\ 751\ 819\ 284\ 967\dots} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(14.14213562\dots)^2$	$(10)2$	$(10)2$
Resultados	200	100	100

Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

## 2.9 A DIAGONAL (D) DO CUBO

Vamos calcular a diagonal (D) do cubo em função do lado L. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, temos  $d = a\sqrt{3} = 1,732\dots$

Figura 35. Demonstrações dos resultados do teorema de Pitágoras: ( $p^2 = 2q^2$ )



$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{1.73205080756978249359415921901}{0.866025403784891246797079609505} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(1.732050807)^2$	$(1.414213562372)^2$	$(1)^2$
resultados	3	2	1

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{3.46410161513788456793638140788}{1.73205080756978249359415921901} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(23.464101615)$	$(2.82842712474)^2$	$(2)^2$
resultas	12	8	4

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{5.19615242270682685190457211183}{2.59807621135256645972193959213} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(25.1961524227)$	$(4.24264068711)^2$	$(3)^2$
resultados	27	18	9

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{6.92820323027576913587276281577}{3.46410161513788456793638140788} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(26.9282032302)$	$(5.656854249491)^2$	$(4)^2$
resultados	48	32	16

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{8.66025403784471141984095351972}{4.33012701892235570992047675986} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	$(28.660254037)$	$(7.07106781186)^2$	$(5)^2$
resultados	75	50	25



$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{10.3923048454136537038091442237}{5.19615242270682685190457211183} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	(210.392304845)	(28.4852813742)	(6)2
resultados	108	72	36

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{12.1243556529825959877773349276}{6.06217782649129799388866746380} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	(212.12435565)	(9.8994949366)2	(7)2
resultados	147	98	49

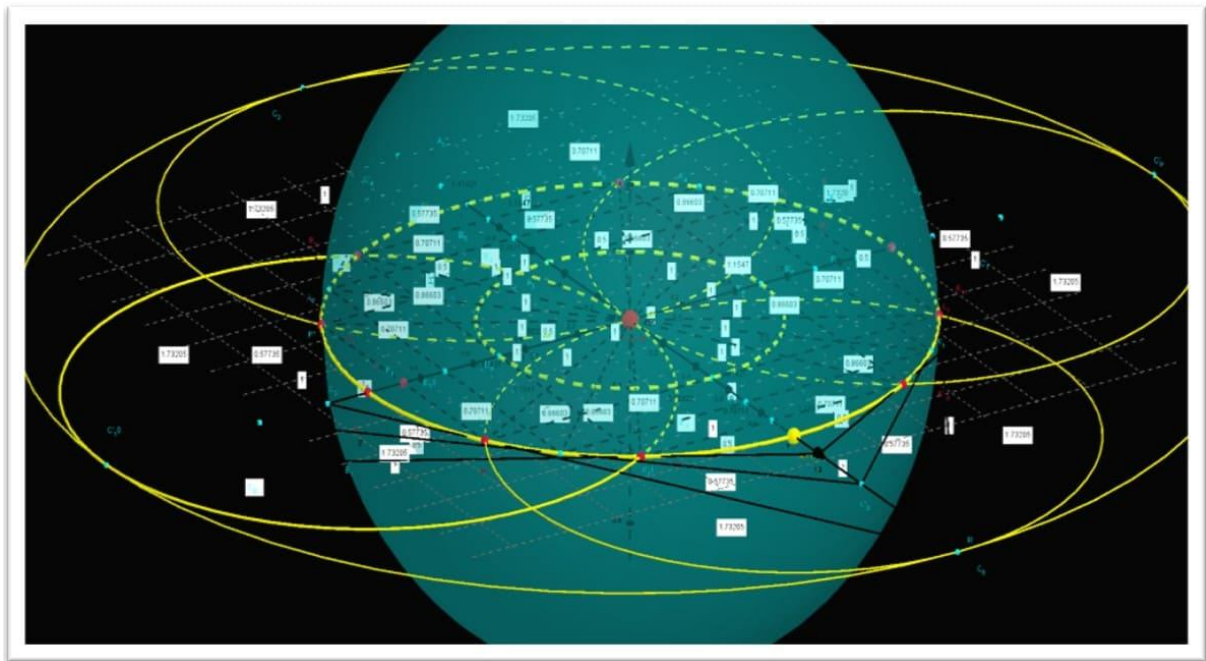
$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{13.8564064605515382717455256315}{6.92820323027576913587276281577} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	(213.85640646)	(11.3137084989)2	(8)2
resultados	192	128	64

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{15.5884572681204805557137163355}{7.79422863406024027785685816774} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	(215.58845726)	(12.7279220613)2	(9)2
resultados	243	162	81

$\frac{p}{q} = 2$	$\frac{17.3205080756894228396819070394}{8.66025403784471141984095351972} = 2.$		
$a^2 = b^2 + c^2$	(217.320508075)	(14.14213562373)2	(10)2
resultados	300	200	100

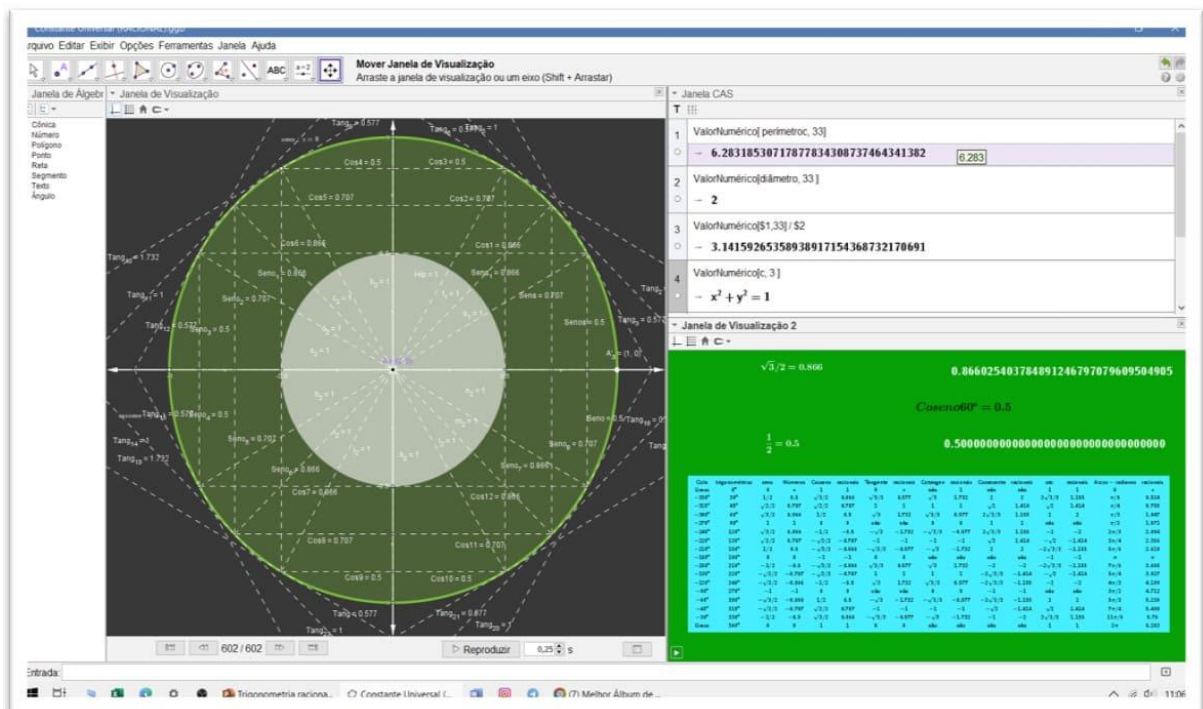
Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura36. Círculo trigonométrico em (3 d) de valores racionais atômicos



Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).

Figura 37. Demonstração de círculo trigonométrico em (3 d) de valores racionais



Fonte: Elaborado autor GeoGebra (2021).





### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Matemáticos de vários tempos procuraram buscar uma racionalidade da constante  $\pi$ . No entanto, eles chegaram a uma descoberta incrível para a época da existência de números irracionais. A prova de que a constante  $\pi$  é irracional foi feita por Johann Lambert em 1761 e Legendre em 1794. Além de irracional,  $\pi$  é um número transcendente, o que foi provado por Ferdinand Lindemann em 1882. Isso significa que não há polinômio com coeficientes inteiros ou racionais. A representação decimal não tem previsibilidade.

Os resultados das demonstrações dos modelos matemáticos cartesiano, isométrico e polar, com cálculos racionais periódicos infinitos, podem ser aplicados em todas as ciências, geometrias de corpos circulares e esféricos, da física e astronomia.

### REFERÊNCIAS

BECKMANN. P. **A History of ( $\pi$ ) $\pi$** . Citação Archimedes of Syracuse cap. 6; pg.63. Citação Leonhard Euler cap.14; pag. 149, Electrical Engineering Department University of Colorado. Ed. Barnes & Noble Books. United States of America, 1971.

IEZZI. G. **Trigonometria. Matemática; 2º grau**. Versão azul; (*et al.*). São Paulo: Atual, 1993.

NETO. A. A. **Trigonometria Noções de Matemática. 2º grau;**(*et al.*). São Paulo: Ed. Moderna, 1978.

WIKIPÉDIA. **O papiro de Rhind**. A enciclopédia livre, 2022.

Enviado: 5 de junho, 2023.

Aprovado: 12 de julho, 2023.

---

<sup>1</sup> Ensino médio completo. ORCID: 0009-0001-1467-1150.