NÚMEROS S-PERFEITOS ÍMPARES

ARTIGO ORIGINAL

FERNANDES, Hiller Alves[1]

FERNANDES, Hiller Alves. **Números s-perfeitos ímpares.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 08, Ed. 03, Vol. 02, pp. 96-107. Março de 2023. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-s-perfeitos, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-s-perfeitos

RESUMO

A teoria dos números é um campo da matemática que possui diversos problemas em aberto. Um número natural N é dito S-perfeito se a soma de todos os seus divisores positivos for igual a SN, isto é, em notação matemática $\sigma(N)=SN$. Um problema muito antigo é o da existência de números perfeitos ímpares. De modo geral, se sabe pouco sobre números S-perfeitos ímpares. Então, o intuito deste artigo é demonstrar e investigar certas propriedades sobre os números S-perfeitos ímpares, em especial, com S ímpar. Inicialmente, será realizada uma breve introdução sobre o tema. Em seguida, há 4 lemas que visam dar suporte e entendimento ao leitor para demonstrações posteriores. Logo após, será apresentado um teorema que é a pedra angular do artigo. Por fim, tem-se duas consequências em forma de corolários e uma breve conclusão da discussão.

Palavras-chave: Números s-perfeitos, Números perfeitos ímpares, Teoria dos números.

1. INTRODUÇÃO

A soma dos divisores positivos de N é denotada por $\sigma(N)$. Um número inteiro positivo é S-perfeito se $\sigma(N)=SN$. Para $S=2$, é dito que N é perfeito. O presente artigo tem como objetivo mostrar um teorema inédito e original e dois corolários decorrentes dele. O problema central é sobre a existência de números S-perfeitos ímpares com S ímpar, que é uma generalização do problema sobre a existência de números perfeitos ímpares. As demonstrações dos resultados são dadas por redução ao absurdo ou contradição.

Um artigo recentemente sobre temas correlatos da teoria dos números foi publicado Poulkas em 2021. Seu artigo possui uma demonstração que prova a inexistência de números perfeitos ímpares. O mais interessante do artigo é que sua demonstração é simples, e se vale tão somente da matemática elementar. O ponto central é o fato dos divisores de N virem em pares. Além disso, sua demonstração se dá pela redução ao absurdo. Se os divisores formam pares, pode-se modificar a forma como trata-se a soma de todos os divisores positivos. De modo que, $\sigma(N) = \left(\sum d_i + \frac{N}{d_i}\right)$ (POULKAS, 2021).

Também neste artigo, um dos pontos centrais é o fato dos divisores de N virem em pares. Contudo, como será demonstrado no lema [3], se N é um S-perfeito com N e S ímpares, então N é um quadrado perfeito. Logo, $\sigma(N) \neq \left(\sum d_i + \frac{N}{d_i}\right)$, pois o lado direito soma duas vezes a $\sqrt{N}$. Então, o argumento necessita de uma pequena correção. Esta ligeira modificação está exposta no lema [4].

2. DEMONSTRAÇÕES

Lema [1]: seja N,S ∈ N. Se N é um número S-perfeito, então, existem pelo menos dois números primos distintos que dividem N.

Demonstração: seja N um inteiro positivo S-perfeito, isto é, σ(N)=SN, suponha-se, por absurdo, que $N=p^a$ com p, α ∈ N ∪{0} e p primo. Logo:

$$\sigma(N = p^{\alpha}) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha} p^i. \ (1)$$

Contudo, $p \nmid \sum_{i=0}^{\alpha} p^i$, mas $p|(SN = Sp^{\alpha})$. Contradição, portanto, N tem pelo menos dois divisores primos distintos.

Lema [2]: seja N∈ N tal que N não é um quadrado perfeito, então, N tem uma quantidade par de divisores positivos, e a soma de seus divisores positivos pode ser dada por:

$$\sigma(N) = \left(\sum_{i=1}^{j} d_i + \frac{N}{d_i}\right).$$

Demonstração: seja $D = \{1, d_2, d_3, . \cdots, d_k\}$ o conjunto de todos os divisores positivos de *N*, então $\forall j \leq k,\ d_j|N \Rightarrow \frac{N}{d_j}|N$, pois $N = d_j \cdot \left(\frac{N}{d_j}\right)$ e $\frac{N}{d_j} \in \mathbb{N}$. Ao definir d_j, o par de divisores $\left(d_j, \frac{N}{d_j}\right)$ é bem definido. O par de divisores (1,*N*) é o par trivial. Como *N* não é um quadrado perfeito, segue que $d_j \neq \frac{N}{d_j}$ para todo $j \leq k$. Portanto,

$$\sigma(N) = 1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k = (1+N) + \cdots + \left(d_{\frac{k}{2}} + \frac{N}{d_{\frac{k}{2}}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} d_i + \frac{N}{d_i}\right). \quad (2)$$

Como queria-se demonstrar. Além disso, *N* tem um número par de divisores, pois há $\frac{k}{2}$ pares distintos com $d_j \neq \frac{N}{d_j}$ para todo $j \leq k$.

Lema [3]: Sejam $N, S \in \mathbb{N}$ tais que ambos são ímpares e $S \geq 3$. Se *N* é um número *S*-perfeito, então *N* é um quadrado perfeito. Demonstração: suponha, por absurdo, que *N>0* é um inteiro ímpar *S*-perfeito, mas não é um quadrado perfeito. Em outras palavras, $\sigma(N) = SN$ e $\sqrt{N} \notin \mathbb{N}$. Então, pelo Lema [2] *N*, possui uma quantidade par de divisores ímpares, consequentemente, $\sigma(N)$ é par. Mas, por hipótese, $\sigma(N)$ é ímpar, contradição. Portanto, N é um quadrado perfeito.

Lema [4]: seja $N \in \mathbb{N}$ tal que *N* é quadrado perfeito, então, a soma de seus divisores positivos pode ser dada por:

$$\sigma(N) = \left(\sum_{i=1}^{j} d_i + \frac{N}{d_i}\right) - \sqrt{N}.$$

Demonstração: seja $D = \{1, d_2, d_3, \cdots, d_k\}$ o conjunto de todos os divisores positivos de *N*, então, $\forall j \leq k,\ d_j | N \Rightarrow \frac{N}{d_j} | N$, pois $N = d_j \cdot \left(\frac{N}{d_j}\right)$ e $\frac{N}{d_j} \in \mathbb{N}$. Ao definir d_j, o par de divisores $\left(d_j, \frac{N}{d_j}\right)$ é bem definido. Contudo, para algum j, tem-se $d_j = \frac{N}{d_j} = \sqrt{N},$ pois *N* é um quadrado perfeito. Para não somar duas vezes sua raiz quadrada, basta subtrair $\sqrt{N}$ após a realização da soma de todos os pares de divisores:

$$\sigma(N) = 1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k = \left(\sum_{i=1}^{j} d_i + \frac{N}{d_i}\right) - \sqrt{N}. \ (3)$$

Teorema [1]: não existe número inteiro positivo ímpar *S*-perfeito com *S* ímpar. Demonstração: seja *k* um número inteiro positivo, suponha, por absurdo, que $N = 2k + 1$ é um número *S-perfeito* com S ímpar, isto é, *σ(N)=SN* com *S* e *N* ímpares. Pelo Lema [3], N é um quadrado perfeito. Então, pelo Lema [4]:

$$\sigma(N) = \left(\sum_{i=1}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) - \sqrt{N} = SN\ . \ (4)$$

Extraindo o par trivial de divisores obtém-se:

$$N + 1 - \sqrt{N} + \left(\sum_{i=2}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = SN \Leftrightarrow \left(\sum_{i=2}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = (S-1)N - 1 + \sqrt{N}. \ (5)$$

RC: 141857
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-s-perfeitos

Pode-se substituir $\sqrt{N}$ por $2k+1$ em (5). Existe $s \in \mathbb{N}$ tal que *S=2s+1*, logo:

$$\left(\sum_{i=2}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = 2sN - 1 + 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=2}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = 2(sN + k). \quad (6)$$

Seja *D* o conjunto dos divisores positivos de *N*, pelo Lema [1], *N* não é primo. isso implica que $D\backslash\{1, N\} \neq \emptyset$, isto é, o conjunto dos divisores positivos não triviais de *N* não é vazio. Portanto, pelo princípio da boa ordenação, existe um elemento em *D* que é o elemento mínimo, isto é, $\exists d_j \in D\backslash\{1, N\}$ tal que para todo $d_i \in D\backslash\{1, N\}$ com $i \neq j$ tem-se $d_j < d_i$, Por convenção, $d_2 = d_j$. Além disso, d_2 é primo. De fato, se d_2 é composto, então existe $d' \in \mathbb{N}$ tal que $d'|d_2 \Rightarrow d'|N$ e, portanto, $d' \in D\backslash\{1, N\}$, mas $d' < d_2$ contradição. Extraindo o par de divisores $\left(d_2, \frac{N}{d_2}\right)$ obtém-se:

$$d_2 + \frac{N}{d_2} + \left(\sum_{i=3}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = 2(sN + k). \quad (7)$$

Observe que $\left(\sum_{i=3}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right)$ é par, então existe $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\left(\sum_{i=3}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right) = 2r$. Substituindo $\left(\sum_{i=3}^{j+1} d_i + \frac{N}{d_i}\right)$ por $2r$ em (7) obtém-se:

$$d_2 + \frac{N}{d_2} + 2r = 2(sN + k)$$

$$\Leftrightarrow \; d_2 + \frac{N}{d_2} = 2(sN + k - r) \;\; (8)$$

$$\Leftrightarrow d_2 - 2(sN + k - r) \; + \frac{N}{d_2} = 0. \;\; (9)$$

Multiplicando toda a equação (9) por d_2 tem-se:

$$d_2^2 - 2(sN + k - r)\, d_2 + N = 0. \;\; (10)$$

Observe que a equação (10) pode ser tratada como uma equação do segundo grau. Para descobrir o valor de d_2, basta aplicar a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Logo:

$$\Delta = \{-2[sN + (k - r)]\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot N$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4[(sN)^2 + 2s(k - r)N + (k - r)^2] - 4N$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4\left[(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2\right]. \ (11)$$

Portanto:

$$d_2 = \frac{2(sN + k - r) \ \pm \ \sqrt{4\left[(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2\right]}}{2}$$

$$\Rightarrow d_2 = sN + k - r \pm \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2}. \ (12)$$

Com maior exatidão

$d_2 = sN + k - r - \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2}$ e $\frac{N}{d_2} = sN - k - r + \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2}$.

Como

$$d_{2,}, (sN + k - r) \ \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2} \ \in \mathbb{N}$$,

portanto, $(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2$ é um quadrado perfeito. Note que:

$$(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 = (sN + k - r - d_2)^2 \ (13).$$

Caso contrário,

$$d_2 \neq sN + k - r - \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \tfrac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2}.$$

. Além disso:

$$(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 < (sN + k - r - d_2 + 1)^2. \ (14)$$

De fato, pois:

$$sN + k - r - \sqrt{(sN + k - r - d_2 + 1)^2} = d_2 - 1\,.(15)$$

$$sN + k - r - \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2} = d_2.(16)$$

Subtraindo a equação (15) de (16), tem-se:

$$\sqrt{(sN + k - r - d_2 + 1)^2} - \sqrt{(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 < (sN + k - r - d_2 + 1)^2. \ (17)$$

Por comodidade, $-d_2 + 1 = -x_0 \Rightarrow -d_2 = -x_0 - 1$. Logo:

$$(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 < (sN + k - r - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow (sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 < (sN)^2 + 2s(k - r - x_0)N + (k - r - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 < 2s(k - r - x_0)N + (k - r - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 2s(k-r)N + (k-r)^2 - N < 2s(k-r)N - 2x_0sN + (k - r - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow (k-r)^2 - N < -2x_0sN + (k - r - x_0)^2$$

$$\Leftrightarrow (k-r)^2 - N < -2x_0sN + (k-r)^2 - 2x_0(k-r) + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow -N < -2x_0sN - 2x_0(k-r) + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow N > 2x_0(sN + k - r) - x_0^2. \quad (18).$$

Por outro lado, $(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2 = (sN + k - r - x_0 - 1)^2$. Logo:

$$(sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k-r)^2$$
$$= (sN)^2 + 2s(k - r - x_0 - 1)N + (k - r - x_0 - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2s(k-r)N + (k-r)^2 - N = 2s(k-r)N - 2s(x_0+1)N + (k - r - x_0 - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow (k-r)^2 - N = -2s(x_0+1)N + (k - r - x_0 - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow (k-r)^2 - N = -2s(x_0+1)N + (k-r)^2 - 2(x_0+1)(k-r) + (x_0+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -N = -2s(x_0+1)N - 2(x_0+1)(k-r) + (x_0+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -N = -2sx_0N - 2sN - 2x_0(k-r) - 2(k-r) + (x_0+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -N = -2x_0(sN+k-r) - 2(sN+k-r) + (x_0+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -N = -2x_0(sN+k-r) - 2(sN+k-r) + x_0^2 + 2x_0 + 1$$
$$\Leftrightarrow -N = [-2x_0(sN+k-r) + x_0^2] - 2(sN+k-r) + 2x_0 + 1$$
$$\Leftrightarrow N = [2x_0(sN+k-r) - x_0^2] + 2(sN+k-r) - 2x_0 - 1. \quad (19)$$

Porém, $N > 2x_0(sN+k-r) - x_0^2$, como demonstrado na equação (18). Consequentemente, $2(sN+k-r) - 2x_0 - 1 < 0$. Portanto:

$$2(sN+k-r) - 2x_0 - 1 < 0 \quad (20)$$

A equação (8) diz que $d_2 + \frac{N}{d_2} = 2(sN+k-r)$ substituindo em (20), obtém-se:

$$d_2 + \frac{N}{d_2} - 2x_0 - 1 < 0. \quad (21)$$

Substituindo x_0 por $d_2 - 1$, em (20), tem-se:

$$d_2 + \frac{N}{d_2} - 2(d_2 - 1) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow d_2 + \frac{N}{d_2} - 2d_2 + 2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N}{d_2} - d_2 + 1 < 0. (22)$$

Contudo, $\frac{N}{d_2} > d_2 \Rightarrow \frac{N}{d_2} - d_2 > 0 \Rightarrow \frac{N}{d_2} - d_2 + 1 > 1 > 0$. Contradição, pois, em (22), tem-se $\frac{N}{d_2} - d_2 + 1 < 0$. Portanto, não existe *N* inteiro positivo e ímpar *S*-perfeito com *S* ímpar.

Como observação: seja o conjunto *M* tal que $x \in M$, então $x^2 > (sN)^2 + 2s\left(k - r - \frac{1}{2s}\right)N + (k - r)^2$ e $x > 0$. Note que $M \neq \emptyset$ e que

$$M = \{(rN + k - r - d_2 + 1)^2, \cdots (rN + k - r)^2, (rN + k - r + 1)^2, \cdots\}.$$

. O elemento mínimo de M é $(rN + k - r - d_2 + 1)^2$. Além disso, $\mathbb{N} \backslash M \neq \emptyset$

.

Corolário [1]: a soma dos inversos dos divisores positivos de *N* não pode ser ímpar se *N* também é ímpar.

Demonstração: suponha, por absurdo, que a soma dos inversos dos divisores positivos de *N* ímpar é ímpar. Então:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{k-1}}+\frac{1}{d_k}=2x+1 \quad (23).$$

Com *x,k ϵ N ∪ {0}* . Por outro lado, para cada d_i, existe um d_j tal que:

$$N=d_id_j \Rightarrow d_i=\frac{N}{d_j} \Rightarrow \frac{1}{d_i}=\frac{d_j}{N} \quad (24)$$

Aplicando o conceito exposto na equação acima e utilizando a propriedade comutativa da divisão, segue que:

$$\frac{d_1}{N}+\frac{d_2}{N}+\cdots+\frac{d_{k-1}}{N}+\frac{d_k}{N}=2x+1$$
$$\Rightarrow \frac{d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k}{N}=2x+1$$
$$\Rightarrow d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k=(2x+1)N$$
$$\Rightarrow \sigma(N)=(2x+1)N \quad (25).$$

O que é uma contradição com o Teorema [1]. Portanto, a soma dos inversos dos divisores positivos de *N* não pode ser ímpar se *N* também é ímpar.

Corolário [2]: a soma dos inversos dos divisores positivos de *N* não pode ser um inteiro positivo se $N=n^2$ com *N* ímpar, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: suponha, por absurdo, que a soma dos inversos dos divisores positivos de N é um inteiro positivo com $N = n^2$ e N ímpar. Pelo corolário [1], sabe-se que essa soma não pode ser ímpar. Portanto, precisa ser par. Logo:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{k-1}} + \frac{1}{d_k} = 2x \quad (26).$$

Com $x, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por outro lado, para cada d_i, existe um d_j tal que:

$$N = d_i d_j \Rightarrow d_i = \frac{N}{d_j} \Rightarrow \frac{1}{d_i} = \frac{d_j}{N} \quad (27).$$

Aplicando o conceito exposto na equação acima e utilizando a propriedade comutativa da divisão, segue que:

$$\frac{d_1}{N} + \frac{d_2}{N} + \cdots + \frac{d_{k-1}}{N} + \frac{d_k}{N} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1} + d_k}{N} = 2x$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1} + d_k = 2xN$$

$$\Rightarrow \sigma(N) = 2xN \quad (28).$$

Portanto, a soma dos divisores positivos de *N* é par. Mas isso é um absurdo, pois a soma dos divisores positivos de um quadrado ímpar é ímpar. Consequentemente, a soma não pertence aos inteiros positivos, visto que todo número inteiro ou é par ou é ímpar.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados são inéditos e originais. A teoria dos números é famosa por conter problemas de fácil entendimento, mas extremamente difíceis de demonstrar. Tais problemas são fantásticos, principalmente quando as soluções são, de certa forma, simples, por usar matemática elementar, mas de extrema elegância.

O ponto central do artigo é investigar a existência de números naturais ímpares e *S*-perfeitos com *S* ímpar. Pelo Teorema [1], é provado que tais números com essa propriedade não existem. A demonstração se vale de um artifício que é somar os divisores por pares do tipo $\left(d_j, \frac{N}{d_j}\right)$ e realizar uma ligeira correção, pois *N* é um quadrado perfeito.

Além disso, há duas consequências decorrentes do Teorema [1]: a primeira é que a soma dos inversos dos divisores positivos de *N* não pode ser ímpar se *N* também é ímpar. Em outras palavras, tal soma só pode ser um inteiro par ou um racional. A segunda consequência é que a soma dos inversos dos divisores positivos de N não pode ser um inteiro positivo se $N = n^2$ com *N* ímpar, $n \in \mathbb{N}$. São racionais e não inteiros. Resultados impressionantes e de cunho teórico.

REFERÊNCIA

POULKAS, Demetrius Chr. Very original proofs of two famous problems: “are there any odd perfect numbers?” (unsolved until to date) and “Fermat’s last theorem: a new proof of theorem (less than one and a half pages) and Its generalization”. Advances in Pure Mathematics, v. 11, n. 11, p. 891-928, 2021.

Enviado: 29 de Dezembro, 2022.

Aprovado: 01 de Março, 2023.

[1] Mestrando em Matemática – (UFVJM), especialista em Matemática financeira e Estatística – (UCAM) e Licenciatura em Matemática – (UNIUBE). ORCID: 0000-0001-6957-6209. CURRÍCULO LATTES: 8992771071815999.